



آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۳)

● حمیدرضا امیری

Example 17 Determine the region of the x, y -plane for which $x^2 + y^2 > 9$.

We first write the inequality in the form

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 9 > 0.$$

The curve C given by $x^2 + y^2 - 9 = 0$, or $x^2 + y^2 = 9$, is a circle whose centre is the origin and of radius 3.

The origin $(0, 0)$ is inside the circle and

$$f(0, 0) = -9$$

and so is not in the required region. The required region is therefore the set of points outside the circle (see Fig. 6.8).

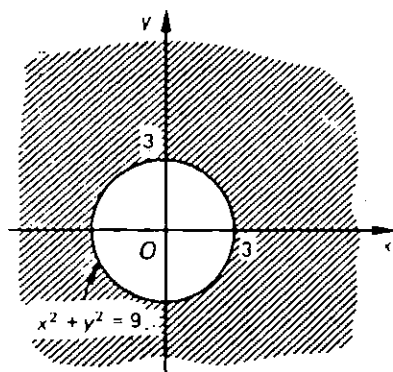


Fig. 6.8

6.5 Inequalities in two variables

We have seen above that the solution of an inequality in one variable is a set of points on the real line.

The solution of an inequality in two variables x and y of the form $f(x, y) > 0$ is a set of points (x, y) in the x, y -plane. The equation $f(x, y) = 0$ is the equation of a curve C in the x, y -plane which divides the plane into two regions. In general, in one of these regions $f(x, y)$ is greater than 0 and in the other $f(x, y)$ is less than 0. Which region is which is easily determined by finding the sign of $f(x, y)$ for just one point.

۶.۵ نابرابریهای دو متغیره

در قسمتهای قبل مشاهده کردیم که مجموعه جواب یک نابرابری یک متغیره، مجموعه‌ای است شامل نقاطی روی خط عددهای حقیقی.

مجموعه جواب یک نابرابری با دو متغیر x و y به شکل $f(x, y) > 0$ مجموعه‌ای است شامل (x, y) هایی واقع در صفحه xOy (صفحه مختصات دکارتی)، که این صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. در حالت کلی، یکی از این ناحیه‌ها $f(x, y) > 0$ و ناحیه دیگر $f(x, y) < 0$ می‌باشد. با پیدا کردن علامت $f(x, y)$ در یک نقطه دلخواه از صفحه، این ناحیه‌ها به راحتی قابل تشخیص می‌باشند.

مثال ۱۷:

و بنابراین $(0,0)$ در ناحیه جواب قرار دارد. بنابراین ناحیه هاشور خورده که مجموعه نقاط روی خط را نیز شامل می‌شود، مجموعه جواب نابرابری می‌باشد. (شکل ۶.۹ را مشاهده کنید).

ناحیه‌ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $x^2 + y^2 > 9$. ابتدا نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 9 > 0$$

منحنی C حاصل از $x^2 + y^2 - 9 = 0$ یا $x^2 + y^2 = 9$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۳.

مبدأ مختصات $(0,0)$ در داخل دایره واقع است و $f(0,0) = -9$ و بنابراین در ناحیه جواب قرار ندارد. بنابراین ناحیه جواب مجموعه نقاط خارج دایره می‌باشد. (شکل ۶.۸ را مشاهده کنید).

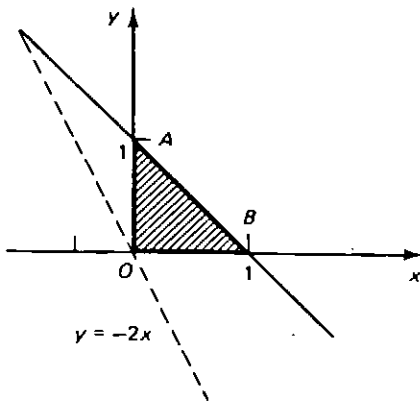


Fig. 6.10

... is quite often necessary to obtain the greatest or least values for points in such a region. (Problems of this nature occur in linear programming.) For example, we might ask: What is the greatest value of $z = 2x + y$ for points satisfying the given inequalities?

The curve $2x + y = k$ is a straight line parallel to the dotted line. As we move this line to the right, k increases. The greatest value will therefore occur when the line is as far from the origin as possible, i.e. when it passes through the point B . The value of z at B is $2(1) + 0 = 2$.

اگر ما محدودیتهای $x \geq 0$ و $y \geq 0$ را نیز اضافه کنیم، ناحیه‌ای حاصل می‌شود که در شکل ۶.۱۰ نشان داده شده است، که تمام خطوط مرزی را نیز شامل می‌شود.

وقتی که ناحیه جواب شامل مرزها (یا قسمتهایی از آنها) باشد، ناحیه مربوطه معمولاً توسط یک منحنی بسته مشخص می‌کند، مطابق آنچه در شکل ۶.۱۰ نشان داده شده است. در بسیاری اوقات نیاز داریم که بیشترین یا کمترین مقدار را در یک ناحیه به دست آوریم (این نوع مسائل در بحث برنامه‌ریزی خطی پیش می‌آیند). برای مثال، ممکن است سؤال کنیم: بیشترین مقدار $z = 2x + y$ برای نقاط واقع در مجموعه جواب نابرابری فوق چقدر است؟ (به‌ازای چه نقطه‌ای از ناحیه فوق عبارت $z = 2x + y$ بیشترین مقدار خود را کسب می‌کند).

منحنی $2x + y = k$ ، دسته خطوطی موازی با هم را مشخص می‌کند. حال اگر خط $y = -2x$ را به موازات خودش و به طرف بالا

Example 18 Determine the region of the x,y -plane for which $x + y \leq 1$.

Write this as $f(x,y) = x + y - 1 \leq 0$. Since the given inequality includes the $=$ sign, the region will include the curve $x + y = 1$. Let us now seek the region for which $x + y < 1$, i.e. $f(x,y) < 0$.

The curve $x + y = 1$ is of course a straight line. This line divides the plane into two half-planes. Substituting $(0,0)$, we obtain

$$f(0,0) = -1 < 0$$

and so $(0,0)$ is in the required region.

The shaded region, including the line, is therefore the required set of points (see Fig. 6.9).

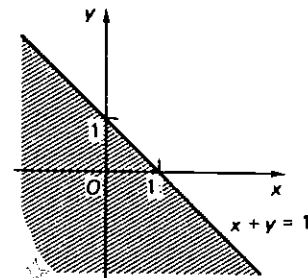


Fig. 6.9

مثال ۱۸:

ناحیه‌ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $x + y \leq 1$. ابتدا نابرابری را به صورت $f(x,y) = x + y - 1 \leq 0$ می‌نویسیم. نابرابری در حالت تساوی مجموعه نقاط روی منحنی $x + y = 1$ را شامل می‌شود. حالا بیایید در جستجوی ناحیه‌ای باشیم که $x + y < 1$ ، یعنی $f(x,y) < 0$.

منحنی $x + y = 1$ مطمئناً یک خط راست است. این خط صفحه را به دو نیم صفحه تقسیم می‌کند. با قرار دادن $(0,0)$ در نابرابری، خواهیم داشت:

$$f(0,0) = -1 < 0$$

منحنی $C_1: y^2 = 4x$ یک سهمی است. در نقطه $(1, 0)$ داریم $y^2 - 4x < 0$ و بنابراین این نقطه نیز نمی‌تواند در ناحیه جواب واقع باشد. پس، ناحیه جواب عبارت است از: ناحیه هاشور خورده در شکل ۶-۱۱.

$$(ب) \quad x^2 + y^2 - 9 < 0 \quad و \quad y^2 - 4x < 0$$

We may use the above analysis. In this case we require the alternative regions in both cases and so we obtain the region shaded in Fig. 6.12. The complete picture is obtained by superimposing Fig. 6.11 on Fig. 6.12.

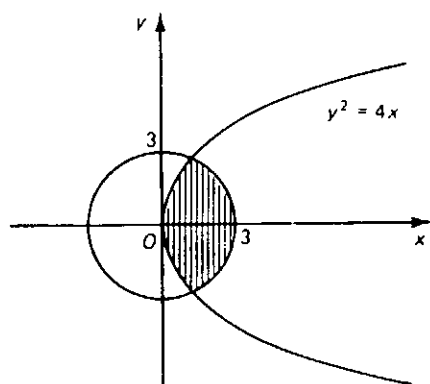


Fig. 6.12

ما از تجزیه و تحلیلی که در بالا انجام شد استفاده می‌کنیم. در این حالت مجموعه جواب حاصل از ناحیه جواب هر دو نابرابری، ناحیه‌ای را برای ما حاصل می‌کند که در شکل ۶-۱۲ هاشور خورده است.

تصویر کامل ناحیه جواب از منطبق کردن شکل ۶-۱۱ بر ۶-۱۲ به دست می‌آید.

حرکت دهیم مقدار k افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار زمانی به دست می‌آید که خط از مبدأ مختصات دور می‌شود، یعنی: وقتی که می‌خواهد نقطه B را ترک کند مقدار Z در نقطه B عبارت است از: $2(1) + 0 = 2$.

Example 19 Determine the region of the x, y -plane for which

$$(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0.$$

The given inequality can only be satisfied if either

(a) both brackets are positive, or

(b) both brackets are negative.

(a) $x^2 + y^2 - 9 > 0$, $y^2 - 4x > 0$.

The curve $C_1: x^2 + y^2 = 9$ is a circle whose centre is the origin and of radius 3.

At the point $(0, 0)$ the function $x^2 + y^2 - 9 < 0$ and so is not in the required region. The required region is the set of points outside the circle.

The curve $C_2: y^2 = 4x$ is a parabola. At the point $(1, 0)$ the function $y^2 - 4x < 0$ and so, again, the point is not in the given region.

Hence, the required region is the region shaded in Fig. 6.11.

$$(b) \quad x^2 + y^2 - 9 < 0, \quad y^2 - 4x < 0.$$

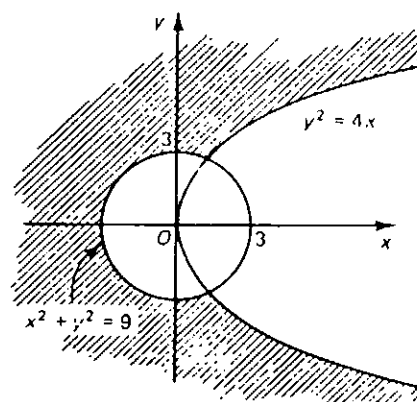


Fig. 6.11

مثال ۱۹:

ناحیه‌ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $(x^2 + y^2 - 9)(y^2 - 4x) > 0$. با توجه به نابرابری، ما فقط دو حالت

می‌توانیم در نظر بگیریم:

(الف) هر دو پرانتز مثبت باشند، یا

(ب) هر دو پرانتز منفی باشند.

$$(الف) \quad x^2 + y^2 - 9 > 0 \quad و \quad y^2 - 4x > 0$$

منحنی $C_1: x^2 + y^2 = 9$ دایره‌ای است به مرکز مبدأ و شعاع ۳.

نقطه $(0, 0)$ در نابرابری صدق نکرده و بنابراین ناحیه جواب، عبارت است از: مجموعه نقاط واقع در خارج دایره.

Exercise 6

- Given that $x > y$, show that $x - b > y - b$.
- Given that $x > y$ and $a > 0$, show that $ax > ay$.
- Given that $a > b$ and a and b are positive, show that, for any positive integer n , $a^n > b^n$.
- Find the set of values of x for which $3x - 2 > 7$.
- Find the set of values of x for which $\frac{2x+3}{x-1} < 1$.
- Find the set of values of x for which $3x - 2 > x^2$.
- Find the set of values of x for which $\frac{x-5}{2-x} > 3$.



ادب ریاضی

سهم مسلمین در بسط کلیه شاخه‌های ریاضیات تأثیر گذاشته است و در بسیاری در درجه اول اهمیت بوده است. با وجود این، هیچ کتاب درسی در تاریخ ریاضیات به زبان انگلیسی جز از یک دیدگاه کلی، به سهم مسلمین نمی‌پردازد. این امر نه تنها از نظر علمی، بلکه از لحاظ آموزشی نیز مایه تأسف است، زیرا سهم دستاوردهای دوره اسلامی، گوهرهایی از استدلال ریاضی را که در دسترس آموختگان ریاضیات دوره دبیرستان هست، در خود دارند. بسیاری از اینها، مراحل مهمی را در بسط حساب اعشاری، مثلثات مسطحه و کروی، جبر و روشهایی از قبیل درونیایی و تقریب ریشه‌های معادلات نشان می‌دهند.

کتابهای تاریخ ریاضیات و تاریخ ریاضیات دوره اسلامی به زبان فارسی نادرترند و معدود محققان تاریخ ریاضیات ایرانی نیز عمدتاً هم خود را به علم رجال و شرح احوال دانشمندان اسلامی و ایرانی معطوف داشته‌اند و یا آثار آنها در حد تک‌نگاری است. مثلاً زنده یاد دکتر غلامحسین مصاحب در کتاب «حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر» پس از مقدمه‌ای کوتاه در مورد تاریخ ریاضیات دوره اسلامی، تلاش عمده خود را به نقد و بررسی رساله «جبر و مقابله» حکیم عمر خیام مصروف داشته و استاد ابوالقاسم قربانی هم عمدتاً در آثار خود به شناساندن رجال ریاضیات اسلامی و ایرانی اهتمام ورزیده است.

(قسمتی از پیشگفتار کتاب گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی)

8 Find the set of values of x for which

$$|x - 3| < 4.$$

9 Find the set of values of x for which

$$|1 - 2x| \leq |3x - 1|.$$

10 Find the set of values of x for which

$$(x + 2)(x - 2)(x + 7) > 0.$$

11 Find the set of values of x for which

$$\frac{x^2 + 56}{x} > 15.$$

12 Show that for real values of x the values of the function $\frac{x^2 + 2}{2x + 1}$ cannot lie between -2 and 1 .

13 Determine the region of the x, y -plane for which $x \geq 0$ and $x - y \leq 1$. Hence find the minimum value of y .

14 Shade the region of the x, y -plane for which $y^2 < 4x$, $x - y < \frac{5}{2}$. Hence find the maximum and minimum values of y .

15 Determine the region of the x, y -plane for which

$$(x^2 + y^2 - 4)(y - x^2) < 0.$$

تمرین ۶:

۱- با فرض اینکه $x > y$ ، نشان دهید $x - b > y - b$.

۲- با فرض اینکه $x > y$ و $a > 0$ ، نشان دهید که $ax > ay$.

۳- با فرض اینکه $a > b$ و a و b هر دو مثبت هستند، نشان دهید،

برای هر عدد صحیح مثبت مانند n ، $a^n > b^n$.

۴- مجموعه جواب نابرابری $3x - 2 > 7$ را بیابید.

۵- مجموعه جواب نابرابری $\frac{2x+3}{x-1} < 1$ را بیابید.

۶- مجموعه جواب نابرابری $3x - 2 > x^2$ را بیابید.

۷- مجموعه جواب نابرابری $\frac{x-5}{2-x} > 3$ را بیابید.

۸- مجموعه جواب نابرابری $|x-3| < 4$ را بیابید.

۹- مجموعه جواب نابرابری $|1-2x| \leq |3x-1|$ را بیابید.

۱۰- مجموعه جواب نابرابری $(x+2)(x-2)(x+7) > 0$ را

بیابید.

۱۱- مجموعه جواب نابرابری $\frac{x^2+56}{x} > 15$ را بیابید.

۱۲- نشان دهید برای مقادیر حقیقی x ، مقدار تابع $\frac{x^2+2}{2x+1}$

نمی‌تواند بین دو عدد 1 و -2 واقع شود.

۱۳- ناحیه‌ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن $x \geq 0$ و

$x - y \leq 1$. سپس کمترین مقدار y را بیابید.

۱۴- ناحیه‌ای از صفحه xOy را هاشور بزنید که در آن $4x < y^2$ و

$x - y < \frac{5}{4}$. سپس بیشترین و کمترین مقدار y را بیابید.

۱۵- ناحیه‌ای از صفحه xOy را مشخص کنید که در آن

$$(x^2 + y^2 - 4)(y - x^2) < 0.$$