

آموزش ترجمه متون ریاضی (۱۱)

(جبر و احتمال نظام جدید و ریاضیات جدید سال چهارم)

● حمید رضا امیری

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1-1-1)$$

* PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION

Let us try to answer the following question: What is the sum of all integers from one through n , for any positive integer n ? If $n=1$, the sum equals 1 because 1 is the only summand. The answer we seek is a formula that will enable us to determine this sum for each value of n without having to add the summands.

با این که این فرمول مقدار صحیحی برای S_n در مورد ده مقدار اولیه n برای ما حاصل می‌کند، ما نمی‌توانیم مطمئن باشیم که به ازای n بزرگتر از ۱۰ نیز برقرار است.

* اصل استقرای ریاضی

اجازه بدهید به سؤال زیر پاسخ دهیم: مجموع همه اعداد صحیح و مثبت از ۱ تا n چقدر است؟ اگر $n=1$ ، مجموع، مساوی ۱ است زیرا ۱ تنها «جمع‌وند»، در مجموع، مورد نظر است. پاسخی که به دنبال آن هستیم فرمولی است که به ما توانایی می‌دهد تا این مجموع را، بدون آن که لزومی برای افزایش «جمع‌وندها» باشد، به ازای هر مقدار n ، معین کنیم.

To construct Table 1-1, we do not need to compute S_n each time by adding the first n positive integers. Having obtained values of S_n ,

TABLE 1-1: SUM S_n OF THE FIRST n CONSECUTIVE POSITIVE INTEGERS.

n	S_n	n	S_n
1	1	6	21
2	3	7	28
3	6	8	36
4	10	9	45
5	15	10	55

for n less than or equal to some integer k , we can determine S_{k+1} simply by adding $(k+1)$ to S_k :

$$S_{k+1} = S_k + (k+1).$$

برای ساختن جدول ۱-۱، لازم نیست که S_n را هر دفعه، با جمع کردن اولین n عدد صحیح و مثبت، حساب کنیم. با به دست آوردن مقادیر S_n برای n های کوچکتر یا مساوی با عددی چون K ، می‌توانیم S_{K+1} را بسادگی با افزودن $K+1$ به S_K معین کنیم:

$$S_{K+1} = S_K + (K+1)$$

This last approach suggests a way of verifying equation (1-1-1). Suppose we know that formula (1-1-1) is true for $n \leq k$, where k is a positive integer. Then we know that

$$S_k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Table 1-1 lists the sum S_n of the first n consecutive positive integers for values of n from 1 through 10. Notice that in each case S_n equals one-half the product of n and the next integer; that is,

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1-1-1)$$

for $n = 1, 2, 3, \dots, 10$. Although this formula gives the correct value of S_n for the first ten values of n , we cannot be sure that it holds for n greater than 10.

جدول ۱-۱ لیست (یا فهرست) مجموع S_n از اولین n عدد صحیح و مثبت متوالی مورد نظر را به ازای مقادیر از ۱ تا ۱۰ برای n به دست می‌دهد. توجه دارید که در هر حالت S_n برابر است با نصف (یک دوم) حاصل ضرب n در عدد صحیح بعدی آن یعنی، به ازای

$$n = 1, 2, 3, \dots, 10$$

ازای $n = 1, 2, \dots, 12$ برقرار است. و از آنجا که برای $n = 1, 2, \dots, 12$ درست است، به ازای $n = 13$ نیز صحیح خواهد بود و غیره.

*** PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION:** A statement about integers is true for all integers greater than or equal to 1 if

- (i) it is true for the integer 1, and
- (ii) whenever it is true for all the integers $1, 2, \dots, k$, then it is true for the integer $k + 1$.

By "a statement about integers" we do not necessarily mean a formula. A sentence such as " $n(n^2 - 1)(3n + 2)$ is divisible by 24" is also

acceptable (see Exercise 17 of this section). The assumption that "the statement is true for $n = 1, 2, \dots, k$ " will often be referred to as the *induction hypothesis*. Sometimes the role 1 plays in the Principle will be replaced by some other integer, say b ; in such instances the principle of mathematical induction establishes the statement for all integers $n \geq b$.

*** اصل استقرای ریاضی:** گزاره‌ای راجع به اعداد صحیح و به

ازای هر عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با یک، راست است اگر

(I) به ازای عدد صحیح ۱ راست باشد، و

(II) اگر به ازای هر عدد صحیح ۱ و ۲ و ... K راست باشد،

آنگاه به ازای عدد صحیح $K + 1$ نیز راست باشند.

منظور ما از «گزاره‌ای راجع به اعداد صحیح» الزاماً اشاره به

یک فرمول نیست، و شامل جمله‌ای مانند « $n(n^2 - 1)(3n + 2)$ بر ۲۴

بخش پذیر است» نیز شده و مورد قبول است. معمولاً به این جمله که

«گزاره به ازای $n = 1, 2, \dots, K$ راست است» فرض استقرای گفته

می‌شود. گاهی اوقات نقشی که عدد ۱ در اصل مزبور بازی می‌کند، با

عدد صحیح دیگری مانند b جایگزین می‌شود که در چنین نمونه‌هایی

اصل استقرای ریاضی گزاره مزبور را به ازای جمیع اعداد صحیح

$n \geq b$ برقرار می‌کند.

and so

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \left(\frac{k}{2} + 1\right)(k+1) \\ &= \frac{(k+2)(k+1)}{2}, \end{aligned}$$

that is,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

این رهیافت اخیر راهی برای برقراری تساوی $(1 - 1 - 1)$ ارائه

می‌دهد. فرض کنید بدانیم که فرمول $(1 - 1 - 1)$ به ازای $n \leq K$

که در آن K عددی صحیح و مثبت است، درست باشد. در این صورت

می‌دانیم که

$$S_K = \frac{K(K+1)}{2}$$

$$S_{K+1} = S_K + (K+1)$$

بنابراین

$$= \frac{K(K+1)}{2} + (K+1) = \left(\frac{K}{2} + 1\right)(K+1)$$

$$= \frac{(K+2)(K+1)}{2}$$

$$S_{K+1} = \frac{(K+1)((K+1)+1)}{2}$$

یعنی

The last equation is the same as equation (1-1-1) except that n is replaced by $k + 1$.

We have proved that if equation (1-1-1) holds for $n \leq k$, then it holds for $n = k + 1$, and we have already verified that equation (1-1-1) holds for $n = 1, 2, \dots, 10$. Therefore, by the preceding argument, we conclude that equation (1-1-1) is also correct for $n = 11$. Since it holds for $n = 1, 2, \dots, 11$, the same process shows that it is correct for $n = 12$. Since it is true for $n = 1, 2, \dots, 12$, it is true for $n = 13$, and so on.

اصطلاحات

Principle	اصل
Mathematical Induction	استقرای ریاضی
Sum	مجموع
Integer	عدد صحیح
One	یک
Positive Integer	عدد صحیح و مثبت

تساوی اخیر همان تساوی $(1 - 1 - 1)$ است که به جای n

$(K + 1)$ قرار داده شده است.

ثابت کردیم که اگر تساوی $(1 - 1 - 1)$ به ازای $n \leq K$ برقرار

باشد، آن گاه به ازای $n = K + 1$ نیز برقرار است، پیش از این بررسی

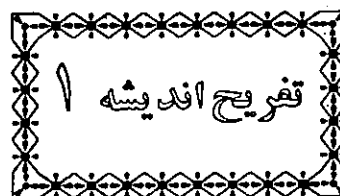
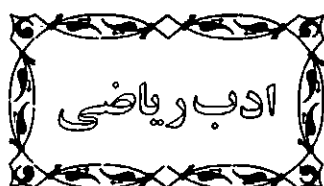
کردیم که تساوی $(1 - 1 - 1)$ به ازای $n = 1, 2, \dots, 10$ برقرار

است. پس، بنا به استدلالی مشابه قبل، می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که

تساوی $(1 - 1 - 1)$ به ازای $n = 11$ نیز صحیح است، و چون به

ازای $n = 1, 2, \dots, 11$ برقرار است، فرایندی مشابه نشان می‌دهد که به

Statement	گزاره	To Equal	برابر بودن، مساوی بودن
Greater	بزرگتر	Summand	جمع وند
Equal	برابر، مساوی	Formula	فرمول
True	راست	To Add	افزایش دادن، اضافه کردن
Divisible	بخش پذیر	Table	جدول
Assumption	مفروض	Consecutive	متوالی
Induction Hypothesis	فرض استقراء	Product	حاصل ضرب
Condition	شرط	Value	مقدار
Result	نتیجه	To Compute	حساب کردن
Theorem	قضیه	Approach	رهیافت
Real Number	عدد حقیقی	To Verify	تحقیق کردن
Remark	تبصره	Equation	برابری، تساوی
Proof	اثبات	Argument	استدلال، برهان
Corollary	قضیه فرعی	Process	فرایند
		Formulation	تنظیم



ماشینی که از لحاظ سوخت در وضعیت ویژه‌ای است و به ازای هر ۳۲ مایل یک بشکه گازوئیل می‌سوزاند در مقابل ماشینی که به ازای هر مایل یک بشکه گازوئیل مصرف می‌کند، در طی یک سال تا چه حد می‌تواند در مصرف گازوئیل صرفه جویی کند؟ فرض کنید میانگین مسافتی که یک ماشین در هر سال می‌پیماید ۹۰۰۰ مایل است.

جواب در صفحه ۸۸

کسی که به تحصیل حکمت* می‌پردازد باید جوان و تندرست باشد، آداب اخیار را از دست ندهد، علوم شرع و قرآن و لغت را پیش از آن آموخته باشد. عقیف و راستگو باشد. غدار و خائن نباشد. به گرم کردن بازار خود و حيله و مکر پردازد. مصالح زندگانی را فراهم کرده، وظایف شرعی را انجام دهد. هیچیک از آداب و ارکان شریعت را ترک نکند. علم و علما را بزرگ دارد. جز علم و علما را محترم نشمارد و حکمت را حرفه نکند. هر که به خلاف این صفات باشد، حکیم دروغین است.

«احصاء العلوم»

* حکمت نظری به سه قسمت الهیات، ریاضیات و طبیعیات تقسیم می‌شده است.