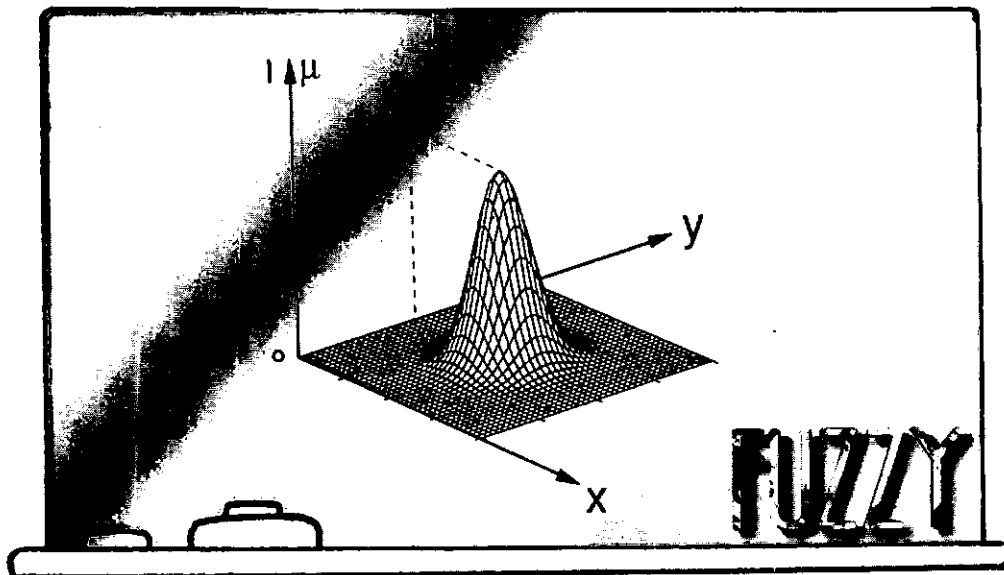
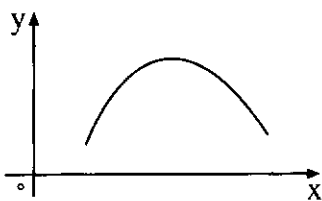




آشنایی با نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

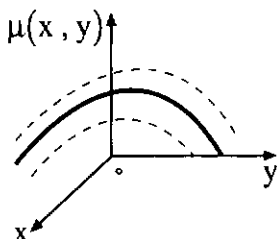
مقدمه

در درس جبر و احتمال سال سوم ریاضی، دانش‌آموزان با مفهوم رابطه و انواع آن آشنا می‌شوند. رابطه به عنوان زیر مجموعه‌ای از حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه تعریف می‌شود و به دنبال آن، خواص رابطه‌ها برای خواننده توضیح داده می‌شود. اهمیت رابطه‌ها پس از معرفی مفهوم تابع بیشتر می‌شود. کاربردهایی که رابطه‌ها در مباحثی چون نظریه‌ی گراف دارند، این مبحث ریاضی را قابل توجه و مهم نموده است. در ریاضیات فازی نیز مفهوم رابطه‌ی فازی به طور دقیق تعریف و روی آن بحث شده است. ممکن است به ویژه برای خوانندگانی که مفهوم رابطه را در حالت قطعی می‌دانند، این سؤال مطرح شود که در حالت فازی، مفهوم رابطه و انواع آن چگونه تعریف و توصیف می‌شود. اکنون به این موضوع خواهیم پرداخت.



نمونه‌ای از یک رابطه‌ی قطعی

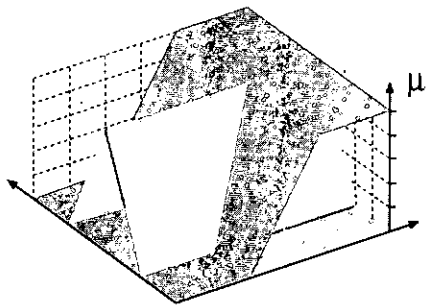
شکل ۱



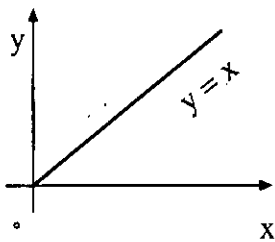
نمونه‌ای از یک رابطه‌ی فازی

شکل ۲

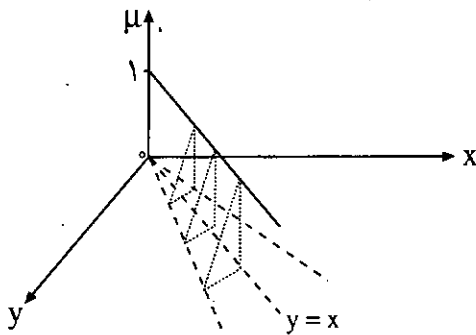
می‌دانیم یک رابطه‌ی قطعی روی R به معنای یک زیر مجموعه از R^2 است که شامل زوج‌های مرتبی چون (x, y) است. در حالت فازی، هر رابطه، زیر مجموعه‌ای از $R^2 \times [0, 1]$ است که شامل سه‌تایی‌های مرتبی به صورت $(x, y, \mu(x, y))$ می‌شود که مؤلفه‌ی $\mu(x, y)$ درجه‌ی عضویت زوج مرتب (x, y) را به رابطه‌ی فازی مشخص می‌کند. اشکال ۱ و ۲، توصیفی از رابطه‌ی قطعی و رابطه‌ی فازی را مشخص می‌کنند. نمودار هر رابطه در حالت قطعی، روی صفحه‌ی R^2 قابل نمایش است و نقاط روی این نمودار، بیانگر اعضای رابطه هستند. در حالی که نمودار تابع عضویت هر رابطه فازی، روی فضای R^2 قابل نمایش است و به منزله‌ی یک کوه فرضی است که نقاط روی قله همان نقاطی هستند که



شکل ۳ نمونه ای از یک رابطه ی فازی با چند α - برش آن



شکل ۴ نمایشی از رابطه ی قطعی y برابر x است.



شکل ۵ نمایشی از رابطه ی فازی y در حدود x است.

همان طور که ملاحظه می شود، درجه ی عضویت را برای زوج های مرتبی نظیر $(1, 2)$ مقدار کمتر و برای زوج مرتبی چون $(1, 7)$ که نسبت به بقیه ی زوج های مرتب بیشترین عضویت را دارند، مقدار ۱ در نظر گرفته ایم.

وقتی می گوئیم « x برابر y است»، « x کوچک تر از y است» یا «مجموع x و y کمتر از ۳ است»، روابطی قطعی روی R^2 مطرح کرده ایم ولی وقتی می گوئیم « x در حدود y است»، « x کمی از y کوچک تر است» یا «مجموع x و y تقریباً ۳ است». روابطی فازی را روی R^2 مطرح کرده ایم که تابع عضویت این نوع روابط فازی، نموداریدر فضای سه بعدی را خواهند داشت که بعد سوم آن بیانگر مقادیر درجه های عضویت است. اشکال ۴ و ۵ رابطه ی قطعی « y برابر x است» و رابطه ی فازی « y در حدود x است» را مقایسه می کنند.

حال رابطه ی قطعی «مجموع مربعات x و y برابر ۴ است»

در حالت قطعی در رابطه تعلق دارند و به عبارتی، دارای درجه ی عضویت ۱ هستند و همان طوری که از قله ی این کوه، از دو طرف به سمت دامنه حرکت کنیم، سایر اعضای این رابطه ی فازی با درجه های عضویت کمتر از یک مشخص شوند. می توانی چنین توصیف کرد که اگر این کوه فرضی که بیانگر نمودار تابع عضویت رابطه ی فازی است، برش داده شود، برش مربوط به قله، همان ۱- برش این رابطه ی فازی و سایر برش ها همان α - برش های $(0 \leq \alpha < 1)$ این رابطه ی فازی را مشخص می کنند. (شکل ۳)

توجه می کنیم که در حالت قطعی، رابطه ی چون R روی $X \times Y$ به صورت کاملاً واضح تعریف می شود، طوری که زوج های مرتب موجود در R ، دقیقاً دارای ویژگی موردنظر هستند. مثلاً اگر $X = \{1, 2, 5\}$ و $Y = \{2, 3, 5, 7\}$ و رابطه ی R به صورت « x کوچک تر از y است» روی $X \times Y$ تعریف شود، آن گاه:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (5, 7)\}$$

حال اگر رابطه ی R به صورت « x کوچک تر از y است» روی $X \times Y$ تعریف شود، دیگر نمی توان به طور واضح مشخص کرد که مثلاً $(5, 7)$ در این رابطه قرار دارد یا خیر. در این حالت، R یک رابطه ی فازی است و باید این ابهام را به صورت معرفی درجه ی عضویت برای هر یک از زوج های مرتب موجود در $X \times Y$ بیان کرد.

رابطه های فازی ابتدا توسط پروفیسور زاده^۱ و به دنبال آن توسط کفمن^۲ و روزنفلد^۳ مطرح شدند و مورد مطالعه قرار گرفتند. در این قسمت، به معرفی مفهوم رابطه ی فازی در حالت دو تایی و انواع مهم آن می پردازیم.

تعریف: فرض کنیم X و Y دو زیر مجموعه ی قطعی از اعداد حقیقی باشند که آن ها را به عنوان مجموعه های مرجع در نظر می گیریم. در این صورت، مجموعه ی زیر، رابطه ی فازی روی $X \times Y$ نامیده می شود:

$$R = \{(x, y), \mu_R(x, y) | (x, y) \in X \times Y\}$$

برای مثال، اگر X و Y را همان مجموعه های مرجع مثال بالا در نظر بگیریم، رابطه ی فازی « x خیلی کوچک تر از y است» را می توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$\tilde{R} = \{((1, 2), 0/1), ((1, 3), 0/3), ((1, 5), 0/6), ((1, 7), 1), ((2, 3), 0/1), ((2, 5), 0/4), ((2, 7), 0/8), ((5, 7), 0/3)\}$$

مشخص کرد. به شکل های زیر توجه کنید:

حال به مثال دیگری توجه کنید. فرض کنیم $X=Y=R$ و رابطه ی فازی $\tilde{R}$ به صورت « x به طور قابل ملاحظه ای بزرگ تر از y است»، تعریف شود. تابع عضویت R را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq y \\ \frac{1}{1 + \frac{1}{(y-x)^2}} & x > y \end{cases}$$

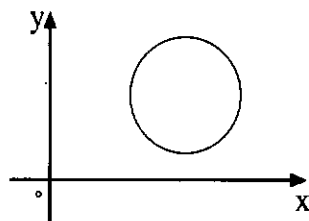
ملاحظه می کنیم، در ضابطه ی بالا، هرچه x از y دورتر شود، مخرج کسر $\frac{1}{(y-x)^2}$ بزرگ تر و لذا کسر کوچک تر می شود؛ به طوری که وقتی x بسیار بسیار از y بزرگ تر باشد، کسر $\frac{1}{1 + \frac{1}{(y-x)^2}}$ تقریباً یک می شود. در هر حال، $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$ مقداری بین ۰ و ۱ است و برای $x \leq y$ نیز صفر تعریف شده است. با این تعریف، زوج مرتب $(1, 1)$ با درجه عضویت $\frac{1}{1+0} = 1$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد و زوج مرتب $(101, 1)$ با درجه عضویت $\frac{1}{1+0.0001} \approx 0.9999$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد. هم چنین، می توان ضابطه ی تابع عضویت $\tilde{R}$ را به این

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq y \\ \frac{x-y}{10y} & y < x \leq 11y \\ 1 & x > 11y \end{cases}$$

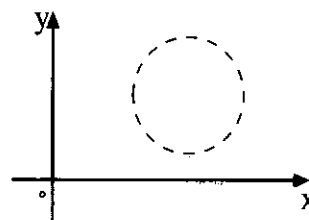
این رابطه به گونه ای تعریف شده که اگر در زوج مرتب (x, y) ، مقدار x از یازده برابر y بزرگ تر شود و مقدار درجه عضویت ۱ باشد، در واقع میزان قابل ملاحظه ای بزرگ تر، روی این که مؤلفه اول بیش از ۱۱ برابر مؤلفه دوم باشد، منظور شده است. به این ترتیب، مثلاً زوج مرتب $(23, 2)$ با درجه عضویت ۱ به این مجموعه تعلق دارد و زوج مرتب $(24, 3)$ با درجه عضویت $\frac{24-3}{10 \times 3} = 0.7$ به $\tilde{R}$ تعلق دارد. فکر و سعی کنید ضابطه های دیگری مشابه با این ضابطه ها برای توصیف این رابطه ی فازی پیشنهاد دهید.

به منظور نمایش یک رابطه ی فازی، می توان از یک جدول یا ماتریس نیز استفاده کرد. این نوع نمایش برای حالتی استفاده می شود که X و Y متناهی باشند. فرض کنید $X = \{1, 2, 3\}$ و $Y = \{1, 3, 5, 10\}$ به صورت « y خیلی به x نزدیک است»،

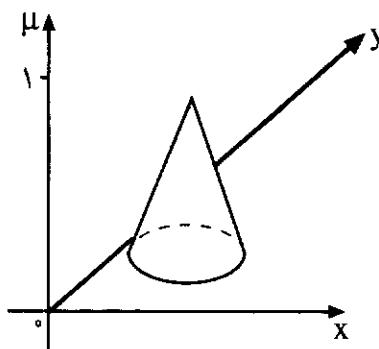
را روی R^2 در نظر می گیریم. می دانیم که نمودار این رابطه دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt{2}$ است. در این حالت، به طور قطع می توان گفت که مثلاً زوج مرتب $(0, 2)$ در این رابطه قرار دارد. حال اگر رابطه را به صورت «مجموع مربعات x و y تقریباً برابر ۴ است» بیان کنیم، رابطه ی فازی را عنوان کرده ایم. در حالت قطعی، زوج مرتب $(1, 1/5)$ به رابطه تعلق نداشت، ولی در حالت فازی می توان گفت، زوج مرتب $(1, 1/5)$ با درجه عضویت مثلاً 0.4 به رابطه تعلق دارد، چرا که مجموع مربعات مؤلفه ها $3/25$ می شود، یا مثلاً زوج مرتب $(1, 1/7)$ با درجه عضویت 0.7 به این رابطه تعلق دارد، چرا که مجموع مربعات مؤلفه ها $3/49$ است و به ۴ نزدیک تر است. در واقع، در حالت فازی، یک مرز مبهم برای معرفی رابطه مطرح می شود که به دلیل همین ابهام، باید با نظیر کردن درجه ی عضویت، میزان تعلق یک زوج مرتب به رابطه را



شکل ۶ یک مرز معین در یک رابطه ی قطعی



شکل ۷ یک مرز مبهم در یک رابطه ی فازی



شکل ۸ نمونه ای از یک رابطه ی فازی در $X \times Y$

عضویت متناظر یکدیگر خواهیم داشت:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0/6	0/7	0
x_2	1	1	0/2	1
x_3	0/5	0	0/5	0/3

$\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0/3	0/1	0/5	0
x_2	0/7	0	0/2	0/8
x_3	0/3	0	0/2	0/1

$\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2$

تعریف: گیریم $\tilde{R}_1$ رابطه‌ی فازی در $X \times Y$ و $\tilde{R}_2$ رابطه‌ی فازی در $Y \times Z$ باشد، ترکیب max-min این دو رابطه‌ی فازی، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \left\{ \left[(x, z), \mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x, z) \right] \mid (x, z) \in X \times Z \right\}$$

با درجه‌ی عضویت

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x, z) = \max_y \left\{ \min \left\{ \mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(y, z) \right\} \right\}$$

که $z \in Z$ و $y \in Y$ ، $x \in X$

مثال: دو رابطه‌ی فازی زیر به ترتیب روی $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ و $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ و $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ تعریف شده‌اند که

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0/1	0/2	0	1	0/7
x_2	0/3	0/5	0	0/2	1
x_3	0/8	0	1	0/4	0/3

$\tilde{R}_1$

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0/9	0	0/3	0/4
y_2	0/2	1	0/8	0
y_3	0/8	0	0/7	1
y_4	0/4	0/2	0/3	0
y_5	0	1	0	0/8

$\tilde{R}_2$

بنابراین، $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ به صورت زیر به دست می‌آید:

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0/4	0/7	0/3	0/7
x_2	0/3	1	0/5	0/8
x_3	0/8	0/3	0/7	1

$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$

در نظر گرفته شود. در این صورت، هریک از نمایش‌های زیر

برای معرفی $\tilde{R}$ مطرح می‌شود:

	1	3	5	10
1	1	0/8	0/4	0
2	0/9	0/9	0/7	0
3	0/8	1	0/8	0/1

$\tilde{R}$ نمایش جدولی

	1	3	5	10
1	1	0/8	0/4	0
2	0/9	0/9	0/7	0
3	0/8	1	0/8	0/1

$\tilde{R}$ نمایش ماتریسی

مقادیر داخل جدول، همان درجه‌های عضویت زوج مرتب (x, y) هستند. در این حالت، برای زوج مرتبی نظیر $(3, 3)$ درجه عضویت 1 و برای زوج مرتبی چون $(1, 10)$ که مؤلفه‌ها خیلی دور از یکدیگرند، درجه عضویت 0 منظور شده است.

به این ترتیب، رابطه‌ی $\tilde{R}$ در این مثال، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{R} = \{ ((1, 1), 1), ((1, 3), 0/8), ((1, 5), 0/4), ((1, 10), 0/9), ((2, 3), 0/9), ((2, 5), 0/7), ((3, 1), 0/8), ((3, 3), 1), ((3, 5), 0/8), ((3, 10), 0/1) \}$$

تعریف: فرض کنیم $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ دو رابطه‌ی فازی در $X \times Y$ باشند. اجتماع و اشتراک این دو رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2 = \left\{ ((x, y), \mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y \right\}$$

$$\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2 = \left\{ ((x, y), \mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y \right\}$$

که

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2}(x, y) = \max \left\{ \mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(x, y) \right\}$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2}(x, y) = \min \left\{ \mu_{\tilde{R}_1}(x, y), \mu_{\tilde{R}_2}(x, y) \right\}$$

مثال: دو رابطه‌ی فازی $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ روی $X \times Y$ که $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ و $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ به صورت زیر

تعریف شده‌اند:

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0/3	0/1	0/5	0
x_2	0/7	1	0/2	1
x_3	0/5	0	0/2	0/1

$\tilde{R}_1$

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0/6	0/7	0
x_2	1	0	0/2	0/8
x_3	0/3	1	0/5	0/3

$\tilde{R}_2$

در این صورت، مطابق تعاریف اجتماع و اشتراک دو رابطه‌ی فازی، با در نظر گرفتن ماکزیمم و می‌نیمم درجات

و به عبارت دیگر:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$$

ج) $\tilde{R}$ پادمتقارن است، در صورتی که: برای $x, y \in X$ که $x \neq y$ یا $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \neq \mu_{\tilde{R}}(y, x)$ یا

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$$

د) $\tilde{R}$ را کاملاً پادمتقارن گوئیم، هرگاه برای $x, y \in X$ که $x \neq y$ ، در صورتی که $\mu_{\tilde{R}}(x, y) > 0$ ، آن گاه

$$\mu_{\tilde{R}}(y, x) = 0$$

می توان گفت که اگر رابطه ی فازی کاملاً پادمتقارن باشد، حتماً پادمتقارن نیز هست. ولی یک رابطه ی فازی پادمتقارن، لزوماً کاملاً پادمتقارن نیست.

د) $\tilde{R}$ تعدی (تراییبی) است؛ در صورتی که $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 \subseteq \tilde{R}$ و به عبارت دیگر:

$$\mu_{\tilde{R} \circ \tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{R}}(x, y)$$

که $(x, y) \in X \times X$.

مثال: رابطه ی فازی مقابل را در مجموعه ی $X \times X$ که

$\tilde{R}$ رابطه ی $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ است، در نظر بگیرید. رابطه ی $\tilde{R}$

بازتابی نیست، زیرا $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_1) \neq 1$.

در واقع، رابطه زمانی بازتابی است که اعضای موجود روی قطر اصلی ماتریس، همگی یک باشند.

$$\tilde{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0/4 & 0 & 0/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0/9 & 0/6 \\ 0/8 & 0/4 & 0/7 & 0/4 \\ 0 & 0/1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

رابطه ی $\tilde{R}$ تقارنی نیست، زیرا مثلاً $\mu_{\tilde{R}}(x_1, x_3) = 0/7$

ولی $\mu_{\tilde{R}}(x_3, x_1) = 0/8$. در واقع رابطه ی $\tilde{R}$ زمانی تقارنی

است که ماتریس متناظر آن متقارن باشد، یعنی درایه های متناظر در بالا و پایین قطر اصلی دوهو برابر باشند. رابطه ی

$\tilde{R}$ پادمتقارن است، ولی کاملاً پادمتقارن نیست، زیرا

مثلاً عضو (x_1, z_1) را در نظر می گیریم و می خواهیم

درجه ی عضویت آن را در $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ بیاییم. مطابق تعریف،

ابتدا بین درجات عضویت $\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y)$ و $\mu_{\tilde{R}_2}(y, z_1)$ که

$y \in \{y_1, \dots, y_5\}$ می نیم می کنیم. بنابراین:

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_1), \mu_{\tilde{R}_2}(y_1, z_1)\} = \min\{0/1, 0/9\} = 0/1$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_2), \mu_{\tilde{R}_2}(y_2, z_1)\} = \min\{0/2, 0/2\} = 0/2$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_3), \mu_{\tilde{R}_2}(y_3, z_1)\} = \min\{0, 0/8\} = 0$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_4), \mu_{\tilde{R}_2}(y_4, z_1)\} = \min\{1, 0/4\} = 0/1$$

$$\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(x_1, y_5), \mu_{\tilde{R}_2}(y_5, z_1)\} = \min\{0/7, 0\} = 0$$

حال بین مقادیر حاصل، ماکزیمم را به عنوان درجه ی

عضویت در نظر می گیریم. لذا:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x_1, z_1) = 0/4$$

به همین ترتیب، سایر درجات عضویت مشخص

می شوند.

نکته: ترکیب max-min دارای خاصیت

شرکت پذیری است، یعنی:

$$(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2) \circ \tilde{R}_3 = \tilde{R}_1 \circ (\tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_3)$$

ولی در حالت کلی، ترکیب max-min خاصیت

جابجایی ندارد $(\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 \neq \tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1)$.

تعریف: گیریم $\tilde{R}$ رابطه ی فازی در $X \times X$ باشد. در

این صورت:

الف) $\tilde{R}'$ انعکاسی (بازتابی) است، در صورتی که:

$$\forall x \in X, \mu_{\tilde{R}}(x, x) = 1$$

ب) $\tilde{R}$ متقارن است، در صورتی که:

$$\forall x, y \in X, \tilde{R}(x, y) = \tilde{R}(y, x)$$

یک رابطه‌ی فازی هم‌ارزی است که $X = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ خواص مذکور را در این رابطه می‌توانید بررسی کنید.

$$\tilde{R} = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 1 & 0/2 & 1 & 0/6 & 0/2 & 0/6 \\ x_2 & 0/2 & 1 & 0/2 & 0/2 & 0/8 & 0/2 \\ x_3 & 1 & 0/2 & 1 & 0/6 & 0/2 & 0/6 \\ x_4 & 0/6 & 0/2 & 0/6 & 1 & 0/2 & 0/8 \\ x_5 & 0/2 & 0/8 & 0/2 & 0/2 & 1 & 0/2 \\ x_6 & 0/6 & 0/2 & 0/6 & 0/8 & 0/2 & 1 \end{array}$$

تعریف: رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ در $X \times Y$ را ترتیب فازی گوئیم، هرگاه بازتابی، پادمتقارنی و تعدی باشد آن را رابطه‌ی ترتیب فازی کامل گوئیم، هرگاه این رابطه انعکاسی، کاملاً پادمتقارنی و تعدی باشد.

حال بررسی کنید، آیا رابطه‌ی فازی مقابل یک رابطه‌ی ترتیب فازی است یا ترتیب فازی کامل یا هیچ کدام؟

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0/4 & 0/8 & 0/7 \\ 0 & 1 & 0 & 0/2 \\ 0 & 0/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0/3 & 1 \end{bmatrix}$$

تعریف: منظور از وارون رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ که آن را با $\tilde{R}^{-1}$ نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای است فازی که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود: $\mu_{\tilde{R}^{-1}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$. به عبارت دیگر، ماتریس متناظر $\tilde{R}^{-1}$ ترانزاده‌ی ماتریس متناظر $\tilde{R}$ است.

مثال: در جداول زیر، روابط $\tilde{R}$ و $\tilde{R}^{-1}$ را ملاحظه می‌کنید.

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0/7 & 0/3 \\ 0/8 & 0/4 & 0/6 \\ 0 & 0/1 & 0/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0/8 & 0 \\ 0/7 & 0/4 & 0/1 \\ 0/3 & 0/6 & 0/5 \end{bmatrix}$$

تعریف: رابطه‌های همانی، مرجع و صفر به صورت‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu_1(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases} \quad (\text{رابطه‌ی همانی})$$

(رابطه‌ی صفر) $\mu_z(x, y) = 0$ و (رابطه‌ی مرجع)

$\mu(x_1, x_1) = 0$ و $\mu(x_2, x_1) = 0$. در واقع، رابطه‌ی $\tilde{R}$ زمانی پادمتقارن است که درایه‌های عمومی a_{ij} و a_{ji} از ماتریس متناظر $\tilde{R}$ یا مختلف یا هر دو صفر باشند، ولی در حالت کاملاً پادمتقارن یکی از این دو درایه باید مثبت و دیگری باید صفر باشد.

مثال دیگری برای بررسی تعدی بودن یک رابطه‌ی فازی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\tilde{R}$ در $X \times X$ به صورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{R} = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0/2 & 1 & 0/4 & 0/4 \\ x_2 & 0 & 0/6 & 0/3 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0/3 & 0 \\ x_4 & 0/1 & 1 & 1 & 0/1 \end{array}$$

در این صورت، $\tilde{R} \circ \tilde{R}$ مطابق تعریف max-min ترکیب رابطه‌ی فازی، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{R} \circ \tilde{R} = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0/2 & 0/6 & 0/4 & 0/2 \\ x_2 & 0 & 0/6 & 0/3 & 0 \\ x_3 & 0 & 0/6 & 0/3 & 0 \\ x_4 & 0/1 & 1 & 0/3 & 0/1 \end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم، چون هر یک از درایه‌های موجود در ماتریس $\tilde{R} \circ \tilde{R}$ یا بیشتر از درایه‌ی متناظر آن در ماتریس $\tilde{R}$ است. لذا $\tilde{R}$ یک رابطه‌ی تعدی است.

نکته‌ی ۱. اگر $\tilde{R}$ بازتابی و تعدی باشد، آن‌گاه

$$\tilde{R} \circ \tilde{R} = \tilde{R}$$

نکته‌ی ۲. اگر $\tilde{R}_1$ و $\tilde{R}_2$ دو رابطه‌ی تعدی باشند $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \tilde{R}_2 \circ \tilde{R}_1$ ، آن‌گاه $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ نیز تعدی است.

تعریف: رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را در $X \times X$ هم‌ارزی گوئیم، هرگاه بازتابی، تقارنی و تعدی باشد. مثال زیر، نمونه‌ای از

$$(\tilde{R}^c)^c = \tilde{R} \text{ و } (\tilde{R}^{-1})^{-1} = \tilde{R} \quad ۲.$$

$$(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2)^c = \tilde{R}_1^c \cup \tilde{R}_2^c \quad ۳.$$

$$(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)^c = \tilde{R}_1^c \cap \tilde{R}_2^c \text{ (قوانین دمورگان)}$$

$$(\tilde{R}^{-1})^c = (\tilde{R}^c)^{-1} \quad ۴.$$

$$\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2 \Rightarrow \tilde{R}_1^{-1} \subseteq \tilde{R}_2^{-1} \quad ۵.$$

یک مثال راحت برای توجیه مفهوم یک رابطه‌ی فازی را در زیر مطرح می‌کنیم:

فرض کنید: $X = \{\text{انبه، انگور، پرتقال، هندوانه، خیار}\}$ و $Y = \{\text{گرد، دراز}\}$ ، رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ را به صورت « x تقریباً y است» در $X \times Y$ در نظر می‌گیریم. جدول زیر، نمونه‌ای از این رابطه‌ی فازی را بیان می‌کند. برای هر کدام از میوه‌های موجود در X ، هر چه قدر خاصیت موجود در Y را بیشتر دارا باشند، در جدول عددی نزدیک‌تر به ۱ و هر مقدار کمتر این خاصیت‌ها را دارا باشند، عددی نزدیک به صفر را به عنوان درجه‌ی عضویت آن زوج مرتب در نظر می‌گیریم.

	انبه	انگور	پرتقال	هندوانه	خیار
دراز	۰/۱	۰	۰	۰	۰
گرد	۰/۳	۰/۹	۱	۰/۹	۰
سنگین	۰/۴	۰	۰/۲	۱	۰/۱

$\mu_U(x, y) = 1$ که در آن‌ها $x \in X$ و $y \in Y$. ماتریس‌های زیر، نمونه‌هایی از ماتریس‌های معرف این روابط هستند:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

توجه می‌کنیم، این روابط همگی قطعی هستند و حالت‌های خاص یک رابطه‌ی فازی محسوب می‌شوند که در آن، مقادیر درجه‌های عضویت فقط ۰ یا ۱ است.

تعریف: متمم رابطه‌ی فازی $\tilde{R}$ که آن را با $\tilde{R}^c$ نمایش می‌دهیم، رابطه‌ای فازی است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{R}^c}(x, y) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(x, y)$$

مثال: جداول زیر یک رابطه‌ی فازی و متمم آن را نمایش می‌دهد.

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0/2 & 0/5 & 0/8 \\ 0/4 & 1 & 0 \\ 0/8 & 0/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{R}^c = \begin{bmatrix} 0/8 & 0/5 & 0/2 \\ 0/6 & 0 & 1 \\ 0/2 & 0/8 & 0 \end{bmatrix}$$

برخی از خواص وارون و متمم رابطه‌ی فازی در زیر مطرح شده‌اند:

$$(\tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2)^{-1} = \tilde{R}_1^{-1} \cup \tilde{R}_2^{-1} \quad ۱.$$

$$(\tilde{R}_1 \cap \tilde{R}_2)^{-1} = \tilde{R}_1^{-1} \cap \tilde{R}_2^{-1} \text{ و}$$

تمرین ۱. فرض کنید $X = \{\text{تهران، قم، رشت}\}$ و $Y = \{\text{بندرانزلی، اراک، کرج}\}$ و $\tilde{R}$ رابطه‌ای فازی در $X \times Y$ به صورت « x تقریباً به y نزدیک است» باشد. (از نظر مسافت)، با استفاده از رسم یک جدول، این رابطه‌ی فازی را توصیف کنید.

تمرین ۲. فرض کنید $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0/7 & 0/5 \\ 0/8 & 0/2 & 0/4 \\ 0/1 & 0/5 & 0/9 \end{bmatrix}$ و $\tilde{S} = \begin{bmatrix} 0/3 & 0/1 & 0/8 \\ 0/9 & 0/7 & 0/5 \\ 1 & 0/2 & 0/3 \end{bmatrix}$ ، مطلوب است $\tilde{R}^{-1}$ ، $\tilde{S}^{-1}$ ، $\tilde{R}^c$ ، $\tilde{S}^c$.

$\tilde{R} \cup \tilde{S}$ ، $(\tilde{R} \cup \tilde{S})^{-1}$ و $\tilde{R}^{-1} \cup \tilde{S}^{-1}$. هم چنین صحت قانون دمورگان به صورت $(\tilde{R} \cap \tilde{S})^c = \tilde{R}^c \cup \tilde{S}^c$ را تحقیق کنید.

پی‌نوشت

1. Zadeh 2. Koufmann 3. Rosenfeld

منابع

۱. مقدمه‌ای بر منطق فازی. کازو تاناکا. ترجمه‌ی دکتر علی وحیدیان کامیاد و دکتر حمیدرضا طارقیان. دانشگاه فردوسی مشهد. چاپ اول، ۱۳۸۱.
2. Fuzzy Set theory and its applications, 3rd edition, H.J. Zimmermann, Kluwer Academic Publishers, USA, 1996.