

آشنایی با اعداد مختلط

(قسمت اول)

(قابل استفاده دانش آموزان سال سوم ریاضی نظام جدید)

● روح الله جهانی پور

§۱. پیدایش

نگاهی گذرا به تاریخ ریاضیات تمدنهای مختلف در اعصار گذشته نشان می‌دهد که بسیاری از مسائل ریاضی که با آن مواجه بودند، در قالب حل معادلات درمی‌آمد. طبیعی است که تا مدت‌های مدیدی، بشر تنها اعدادی را که برای شمارش به کار می‌روند، می‌شناخت: ۱، ۲، ۳، ... و از این رو عمده معادلات جبری یاد شده، دارای جوابهای صحیح مثبت بودند. لیکن این وضع دوام چندانی نداشت و با مطرح شدن مسائلی از قبیل تقسیم‌بندی قطعه زمینها، یا جیره غذایی روزانه کارگران، مثلاً در مصر قدیم، معادلات جبری با جوابهایی مثل: $\frac{1}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ ، ... پایه عرصه وجود گذاشتند. در همین راستا هر چند اعداد صحیح منفی یا اعدادی مثل $\frac{1}{4}$ - یا $\frac{4}{5}$ - در عمل مفید واقع می‌شوند لیکن بیشتر جنبه نظری دارند. واضح است که در مرحله اول اعداد منفی برای شمارش مفید نیستند و در واقع می‌توان گفت که منفی بیشتر جنبه قرارداد دارد و تعبیر کاهش، نزول و خلاف جهت را دارد، مثلاً شتاب منفی در حرکت یک جسم یعنی؛ کاهش سرعت، یا درجات دمایی منفی نشان دهنده کاهش دما هستند. اعدادی مثل $\frac{1}{4}$ ، $\frac{4}{5}$ - یا به صورت کلی $\frac{p}{q}$ ، که p و q اعداد صحیحند و در ضمن $q \neq 0$ را اعداد گویا می‌نامند. یونانیان باستان نیز همچون دیگر اقوام قدیم درگیر مسائل عملی بودند که منجر به مطرح شدن مسائل ریاضی می‌شد. لیکن آنها عمده توجه خویش را معطوف جنبه نظری آنها کرده بودند. بیایید با فیثاغورسیان باستان همراه شویم و ببینیم چه طور می‌توانیم با دیدی صرفاً نظری، اعداد را کشف کنیم.

معادله $2x - 2 = 0$ را شاید غارنشینان هم بتوانند حل کنند، زیرا جواب آن $x = 1$ است و یک نخستین عدد از سلسله اعدادی

است که آنها را برای شمارش به کار می‌بردند، مثلاً: شمارش افراد قبیله یا شمارش تعداد شکارهای انجام شده در یک روز. با این حال آنها نمی‌توانستند معادله $0 = x + 2$ را حل کنند. چرا؟ زیرا هیچ کدام از اعدادی که آنها می‌شناختند یعنی؛ اعداد شمارشی یا طبیعی در این معادله صدق نمی‌کند. آیا یونانیان هم نمی‌توانستند آن را حل کنند؟ شاید آری، شاید نه. امروزه می‌دانیم که جواب این معادله $x = -2$ است و -2 عددی است صحیح که اگر با ۲ جمع شود، حاصل صفر خواهد شد. به این ترتیب توانسته‌ایم اعداد دیگری علاوه بر آنچه غارنشینان هم می‌دانستند به دست آوریم. باز هم جلوتر می‌رویم و معادله $0 = 1 - 2x$ را در نظر می‌گیریم. این بار مجموعه اعداد وسیعتری که به دست آورده‌ایم هم نمی‌تواند جواب این معادله را دربرداشته باشد. لیکن جواب این معادله $x = \frac{1}{2}$ است، و به این ترتیب این عدد یا توسط معادلات دیگری از این دست، اعداد جدیدتری بر مجموعه اعداد اولیه مان افزوده می‌شود و اینها همان اعداد گویا هستند که ذکرشان رفت. فیثاغورسیان این اعداد را می‌شناختند و حتی بیشتر از اینها ادعا کردند و گفتند که تمام اعداد از این نوعند یعنی؛ گویا هستند. اما وقتی متوجه شدند که این طور نیست و اعدادی هم وجود دارند که گویا نیستند تصور کردند که به اصطلاح اقتضای نیاز آمده است و اگر بخواهیم نامی بر آن بگذاریم، می‌توانیم بگوییم: رادیکال گیت (به اقتباس از واترگیت) به وجود آمد و این بحران یک قربانی هم داد و شخصی از مکتب فیثاغورسیان که این موضوع را فاش کرده بود، مجازات شد و به دریا انداخته شد تا به

سزای عملش برسد!!

آنچه آنها دریافته بودند چه بود؟ بد نیست این مطلب را تحت

عنوان یک قضیه بیاوریم:

قضیه: $\sqrt{2}$ گنگ است، یعنی گویا نیست.

برهان: فرض کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد. پس اعداد صحیح p و q موجودند که $q \neq 0$ و

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم p و q هیچ عامل مشترکی نداشته باشند چه در این صورت می‌توان آن را از صورت و مخرج کسر حذف کرد. با این شرط کسر فوق را تحویل‌ناپذیر می‌نامند. حال با این فرضیه پیش می‌رویم و به تناقض می‌رسیم. دو طرف (۱) را به توان ۲ می‌رسانیم. آنگاه

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

یا:

$$p^2 = 2q^2$$

پس p^2 زوج است و در نتیجه p زوج است. بنابراین عدد صحیح k موجود است که

$$p = 2k$$

لیکن در این صورت داریم:

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

یعنی q^2 و در نتیجه q زوج است. پس p و q هر دو زوجند یعنی 2 در هر دو عامل مشترک است و این با فرض تحویل‌ناپذیر بودن $\frac{p}{q}$ در تناقض است. بنابراین $\sqrt{2}$ گویا نیست. ■

به این ترتیب مجموعه باز هم وسیع‌تری به دست می‌آوریم مرکب از اعداد گویا و گنگ بر روی یکدیگر. این مجموعه را مجموعه اعداد حقیقی می‌نامند. باز هم جلوتر می‌رویم. می‌دانیم (از جبر دیرستانی) که مربع هر عدد حقیقی، عدد حقیقی نامنفی است. به زبان دیگر اگر $\mathbb{R}$ نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی و $x \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد، آنگاه

$$x^2 \geq 0$$

بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + 1 \geq 1$$

پس هیچ عدد حقیقی در معادله $x^2 + 1 = 0$ صدق نمی‌کند چه در غیر این صورت به نابرابری $1 \geq 0$ می‌رسیم که ممتنع هستند. می‌بینیم که با این که مجموعه اعداد بسیار وسیعی به دست آورده‌ایم با این حال هنوز هم معادلاتی می‌توانیم بنویسیم که جوابی در این مجموعه

ندارند. منشأ عدم وجود جواب برای این معادله یا معادلاتی از این دست، آن است که ریشه دوم اعداد منفی در $\mathbb{R}$ تعریف نشده است. سؤال این است که اگر ریشه دوم‌گیری از اعداد منفی را نیز مجاز بدانیم چه پیش می‌آید. این جاست که مجموعه‌ای باز هم گسترده‌تر، مجموعه‌ای که در آن هر معادله چند جمله‌ای مثل $x^2 + 1 = 0$ جواب دارد، به وجود می‌آید. در خلق این مجموعه که شیه سلسله مراتب طی شده تاکنون، شامل $\mathbb{R}$ نیز است، معادله $x^2 + 1 = 0$ ، نقش اساسی را ایفا می‌کند. هر چند رهیافت کاملاً دقیقی در جبر وجود دارد که به خلق این مجموعه از اعداد منتهی می‌گردد، لکن ما همین مسیر نسبتاً نادقیق را پی می‌گیریم. جواب معادله

$$x^2 + 1 = 0$$

را با حرف i نشان می‌دهیم. در واقع i دارای این ویژگی بنیادی است که

$$i^2 = -1$$

یا با اصطلاحات حقیقی $i = \sqrt{-1}$. این عدد را به مجموعه اعداد حقیقی می‌افزاییم. خاصیت‌های خوبی که می‌خواهیم یک مجموعه از اعداد داشته باشد، یکی این است که نسبت به عملهای معینی، بویژه جمع و ضرب، بسته باشد. پس می‌خواهیم مجموعه جدیدمان که البته هنوز جمع و ضرب آن را به طور دقیق تعریف نکرده‌ایم، دارای ویژگی‌هایی مثل شامل بودن عدد $2i$ ، $i + i = 2i$ ، $i - i = 0$ ، $\sqrt{2}i$ ، ... باشد. به این ترتیب اندک‌اندک به سوی نمایش شکل کلی اعداد یا اعضای این مجموعه جدید رهنمون می‌گردیم. شکل کلی این اعداد به صورت

$$a + bi \quad (2)$$

است که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند. مجموعه جدید را مجموعه اعداد مختلط می‌نامیم. در نمایش (۲) چیزهای تعیین‌کننده عدد فقط a و b هستند. یعنی در دست داشتن a و b عدد فوق را به ما می‌دهد و تمایز بین دو عدد از این نوع در نتیجه تمایز a ها و b های مختلف است. اعداد مختلط را به رسم با حروفی از قیل $w, t, \dots$ یا با اندیس مثل $z_1, z_2, \dots$ نمایش می‌دهیم. یک عدد نوعی به صورت $z = a + bi$ نشان داده می‌شود. به این ترتیب اگر $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ که در آن a, b, c, d اعداد حقیقی‌اند تنها و تنها وقتی مساوی‌اند که $a = c$ و $b = d$. تاکنون تنها ویژگی که از i ذکر کردیم این است که $i^2 = -1$.

$b = 0$ آنگاه $|a| = r$ ، که با حالت حقیقی خود توافق دارد. منشأ هندسی این موضوع را نیز بعداً خواهیم گفت.

دیدیم که در مشخص کردن یک عدد مختلط $z = a + bi$ فقط a و b نقش دارند و با معلوم شدن دو عدد حقیقی a و b ، z کاملاً معین می‌شود. این مطلب، این اندیشه را در ذهن به وجود می‌آورد که هر عدد مختلط z به صورت فوق را با زوج مرتب

$$(a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

متناظر قرار دهیم. مرتب از آن جهت که دو عدد مختلط $a + bi$ و $b + ai$ با هم فرق دارند. بنابراین می‌توانیم به جای گفتگو دربارهٔ اعدادی به شکل $a + bi$ صرفاً از زوج مرتبهای اعداد حقیقی یعنی (a, b) سخن بگوییم و حتی نام اعداد مختلط را هم نبریم و جمع و ضرب یاده شده در بالا را روی زوج مرتبها تعریف کنیم، یعنی تعریف کنیم:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (3)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (4)$$

بنابراین به تعریف جدیدی از اعداد مختلط دست می‌یابیم که در آن ذکر از معادله یا چیزی به نام i نیامده است. این رهیافت را روش اصل موضوعی در ابداع اعداد مختلط می‌نامند.

تعریف ۲: مجموعه C ، اعداد مختلط، مجموعه‌ای است مرکب از زوج مرتبهای به شکل

$$(a, b) \quad a, b \in \mathbb{R}$$

که از دو قانون جمع و ضرب با علامتهای $+$ و $\cdot$ به صورت ۳ و ۴ تبعیت می‌کنند. ●

در این طریقه نمایش، عدد حقیقی a ، همان زوج مرتب $(a, 0)$ است و معمولاً به جای $(a, 0)$ ، a می‌گذارند. حال می‌بینید که

$$(a_1, 0) + (a_2, 0) = (a_1 + a_2, 0)$$

و

$$(a_1, 0) \cdot (a_2, 0) = (a_1 a_2, 0)$$

و این نشان می‌دهد که اعمال جمع و ضرب ۳ و ۴ روی اعداد مختلط تعمیم جمع و ضرب روی اعداد حقیقی اند. حال زوج مرتب $(0, 1)$ را با آن نشان می‌دهیم. در این صورت

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

و نیز اگر $z = (a, b)$ عدد مختلط دلخواهی باشد، داریم:

حال بیایید به عدد مختلط $a + bi$ به چشم یک چندجمله‌ای بر حسب i نگاه کنیم و ویژگی فوق را در نظر داشته باشیم. با این کار چیز خاصی را از دست نداده‌ایم، بلکه حتی می‌توانیم چیزهای نویی هم به دست آوریم. ضرب چندجمله‌ای‌ها را به یاد بیاورید. $z = a + bi$ و $w = c + di$ را دو چندجمله‌ای بر حسب i بگیرید و مطابق ضرب چندجمله‌ای‌ها آنها را در هم ضرب کنید:

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + i^2 bd$$

اما $i^2 = -1$ لذا

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

پس عجالتاً توانستیم فرمولی برای ضرب دو عدد مختلط به قیاس با چند جمله‌ایها ارائه کنیم. خواهیم دید که این طرز تعریف ضرب، ویژگیهای معمول ضرب را دارد. حال که برای ضرب می‌توانیم این کار را بکنیم، طبعاً برای جمع نیز باید بتوانیم ویژگی جمع چند جمله‌ایها را به کار ببریم. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

حال به همه آنچه تاکنون گفتیم رسمیت می‌بخشیم و تعریف زیر را ارائه می‌کنیم:

تعریف ۱: مجموعه C ، اعداد مختلط، مجموعه‌ای است مرکب از اعدادی به شکل نوعی

$$a + bi \quad a, b \in \mathbb{R}$$

که تساوی، جمع و ضرب در آن به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ و } b = d$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

در عدد مختلط $a + bi$ ، اگر $b = 0$ ، عدد حقیقی a را به دست می‌آوریم و این مصدق این واقعیت است که اعداد حقیقی زیر مجموعهٔ اعداد مختلطند. عدد مختلط $-a - bi$ را $-z$ یا قرینهٔ عدد مختلط $z = a + bi$ و عدد مختلط $0 + 0i$ را صفر مختلط یا به اختصار صفر می‌نامیم. به این ترتیب می‌توانیم تفاضل دو عدد مختلط z و w را به صورت مجموع z و $-w$ تعریف کنیم، یعنی

$$z - w = z + (-w)$$

باز هم دو اصطلاح دیگر داریم: عدد مختلط $z = a - bi$ را مزدوج عدد مختلط z می‌نامیم و مقدار $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ را قدر مطلق عدد مختلط $z = a + bi$ اصطلاح قدر مطلق به این دلیل است که اگر

ضرب تعریف شده در فوق یک میدان تشکیل می‌دهد که آن را میدان اعداد مختلط می‌نامند.

برهان: برهان این قضیه بسیار ساده است و با توسل به هر کدام از دو نوع نمایش اعداد مختلط می‌توان تمام بندهای آن را ثابت کرد. برای نمونه ما مثلاً بند I' را ثابت می‌کنیم. فرض کنید:

$$z_1 = (a, b)$$

$$z_2 = (c, d)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید روش زوج مرتبی را برای نمایش z_1 و z_2 به کار برده‌ایم. آنگاه داریم:

$$z_1 z_2 = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da)$$

$$= z_2 z_1$$

در ضمن اثبات از ویژگی جابه‌جایی ضرب اعداد حقیقی استفاده شده است. برهان بقیه بندهای قضیه را به خواننده واگذار می‌کنیم. ■

در قضیه فوق شیء جدیدی با نام وارون ضربی یا به عرصه وجود گذاشت. سؤال این است که اگر $z = (a, b)$ یا $z = a + bi$ وارون z^{-1} را چگونه می‌توان بر حسب a و b و به صورت شکل نوعی اعداد مختلط نوشت. خوب! $w = z^{-1}$ چه خاصیتی دارد؟ اگر فرض کنیم:

$$w = (x, y)$$

آنگاه

$$z \cdot w = 1 \quad (z \neq 0)$$

یا:

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx) = (1, 0)$$

بنابراین برای یافتن x و y باید دستگاه دو معادله - دو مجهول

$$ax - by = 1$$

$$ay + bx = 0$$

را حل کنیم. دستگاه اخیر در صورتی جواب دارد که دترمینان ضرایب یعنی $a^2 + b^2$ مخالف صفر باشد. و این فرض محقق است زیرا فرض بر این است که $z \neq 0$ و در نتیجه $|z| \neq 0$. جواب این دستگاه عبارت است از:

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{و} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

و بنابراین:

$$z^{-1} = w = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$$

به کمک وارون ضربی یک عدد مختلط می‌توان تقسیم دو عدد مختلط را تعریف کرد:

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + bi = a + bi$$

و بدینسان از طریق دقیق اصل موضوعی به همان نمایش قبلی می‌رسیم.

در روش نمایش زوج مرتبی، اگر $z = (a, b)$ آنگاه

$$\bar{z} = (a, -b)$$

$$-z = (-a, -b)$$

و برای $w = (c, d)$ داریم: $z - w = (a - c, b - d)$

حال ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط را در قالب یک قضیه به صورت زیر گردآوری می‌کنیم.

قضیه: (ویژگیهای جمع و ضرب اعداد مختلط)

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (I)$$

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad (II)$$

ویژگی شرکت پذیری جمع

$$\forall z \in \mathbb{C} : z + 0 = 0 + z = z \quad (III)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : z + (-z) = (-z) + z = 0 \quad (IV)$$

ویژگی عنصر وارون جمعی

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad (I')$$

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \quad (II')$$

ویژگی شرکت پذیری ضرب

$$(III') \quad \text{عنصری که آن را با ۱ نشان می‌دهیم وجود دارد به طوری که}$$

برای هر $z \in \mathbb{C}$

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$$

$$(IV') \quad \text{برای هر } z \in \mathbb{C}, z \neq 0, \text{ عنصری که آن را با } z^{-1} \text{ نشان}$$

می‌دهیم موجود است که

$$(V') \quad z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$$

تبصره ۱: عنصر ۱ موجود، در ویژگی III' را عنصر خنثی ضرب یا

واحد ضرب می‌نامیم و در قالب نمایش زوج مرتبی همان عدد

(۱ و ۰) است. و عنصر z^{-1} در IV' را وارون ضربی $z \neq 0$ گویند.

تبصره ۲: مجموعه کلی F همراه با دو عمل + و . که آنها را به

ترتیب جمع و ضرب می‌نامیم و از ویژگیهای I تا V' تبعیت می‌کنند

را یک میدان می‌نامند. بنابراین C، اعداد مختلط، همراه با جمع و

$$= \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

و نیز برای $z_1, z_2 \in C$ با $z_2 \neq 0$ داریم:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

مثال ۳: ویژگی پخشی اعداد مختلط را ثابت کنید، یعنی؛ نشان دهید

برای هر $z_1, z_2, z_3 \in C$ داریم: $z_1(z_2 \pm z_3) = z_1 z_2 \pm z_1 z_3$

حل: قرار می‌دهیم:

$$z_1 = (a_1, b_1) \text{ و } z_2 = (a_2, b_2) \text{ و } z_3 = (a_3, b_3) \text{ آنگاه برای + داریم:}$$

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (a_1, b_1)(a_2 + a_3, b_2 + b_3) = \\ &= (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3) \\ &= [(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3), (a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 b_3 + b_1 a_3)] \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, a_1 b_3 + b_1 a_3) \\ &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

برای منفی نیز وضع به همین ترتیب است.

مثال ۴: از قانون پخشی نتیجه بگیرید که برای $z \neq 0$ و $z_1, z_2 \in C$

$$\frac{z_1 \pm z_2}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z}$$

حل: طبق قانون پخشی داریم:

$$(z_1 \pm z_2) \frac{1}{z} = z_1 \cdot \frac{1}{z} \pm z_2 \cdot \frac{1}{z} = \frac{z_1}{z} \pm \frac{z_2}{z}$$

مثال ۵: محاسبه کنید:

$$(1 + 2i) + (3 - i) = 4 + i \quad (\text{الف})$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2i}{2} = i \quad (\text{ب}) \text{ (بنابر مثال ۲)}$$

$$(1+2i) \cdot (3-i) = (3+2) + (-1+6)i = 5 + 5i \quad (\text{ج})$$

$$i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = i \cdot i^2 = -i \Rightarrow i^4 = i \cdot i^3 = -i^2 = 1 \quad (\text{د})$$

(ه) برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم:

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1, \quad i^{4k+1} = 1 \cdot i = i$$

$$\forall z_1, z_2 \in C, \quad z_2 \neq 0: \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

با این تعریف ملاحظه می‌کنیم که به ازای $z_1 = 1$ و $z_2 = z$ داریم:

$$\frac{1}{z} = z^{-1}$$

در ضرب دو یا چند عدد مختلط، عوامل ضرب می‌توانند مساوی هم باشند. به این ترتیب به تعریف توان صحیح مثبت برای هر عدد مختلط z نایل می‌شویم. این تعریف به صورت استقرایی انجام می‌گیرد. یعنی؛ ابتدا z^1 و آنگاه برای هر z^n ، $n \geq 2$ را تعریف می‌کنیم:

$$z^1 = z \quad \text{و} \quad z^n = z z^{n-1} \quad n \geq 2$$

تا این‌جا اطلاعات نسبتاً خوبی به دست آوردیم. به کمک این اطلاعات می‌توانیم مسائل متنوعی را در اعداد مختلط حل کنیم. حال برای آشنایی بیشتر با نحوه کاربرد این مفاهیم و نیز کشف ویژگیهای جدید و در عین حال جالب از اعداد مختلط چند مسأله را در قالب مثال می‌آوریم.

مثال ۱: ثابت کنید اگر $z = -z$ ، آنگاه $z = 0$ و اگر $z = \bar{z}$ آنگاه $z \in IR$

حل: فرض کنیم $z = (a, b)$ و $z = -z$ در این صورت

$$(a, b) = (-a, -b)$$

و بنابر تعریف برابری دو عدد مختلط: $a = -a$ و $b = -b$ که از آن‌جا به دست می‌آید $a = b = 0$ ، یعنی؛ $z = (a, b) = 0$. حال اگر $z = \bar{z}$ آنگاه

$$(a, b) = (a, -b)$$

و بنابراین $b = -b$ یعنی $b = 0$ یا $z = (a, 0)$ پس $z \in IR$

مثال ۲: ثابت کنید برای هر عدد مختلط z ، $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ و برای هر $z_1, z_2 \in C$ و $z_2 \neq 0$ ،

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

حل: فرض کنیم $z = (a, b)$. آنگاه طبق تعریف قدر مطلق داریم: $|z|^2 = a^2 + b^2$ اما دیدیم که

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{1}{a^2 + b^2} (a, -b)$$

که در مورد تقسیم فرض اضافی $z_p \neq 0$ را نیز در نظر می‌گیریم.

حل: از مثال ۷ و ویژگی جابه‌جایی ضرب اعداد مختلط استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} |z_1 z_p|^2 &= (z_1 z_p)(\overline{z_1 z_p}) = (z_1 z_p)(\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_p) = (z_1 \bar{z}_1)(z_p \bar{z}_p) \\ &= |z_1|^2 |z_p|^2 \end{aligned}$$

حال از دو طرف ریشه دوم می‌گیریم و دقت می‌کنیم که قدر مطلق همواره نامنفی است. به همین نحو برای تقسیم داریم:

$$\left| \frac{z_1}{z_p} \right|^2 = \frac{z_1}{z_p} \cdot \overline{\left(\frac{z_1}{z_p} \right)} = \frac{z_1}{z_p} \cdot \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_p} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_1}{z_p \cdot \bar{z}_p} = \frac{|z_1|^2}{|z_p|^2}$$

و بار دیگر ریشه دوم می‌گیریم و نتیجه را به دست می‌آوریم.

تبصره ۳: نمایش عدد مختلط z به صورت

$$z = a + bi$$

را نمایش جبری و در آن a را بخش حقیقی z و b را بخش موهومی آن می‌نامیم و با نمادهای $a = \operatorname{Re} z$ و $b = \operatorname{Im} z$ نشان می‌دهیم.

مثال ۹: ثابت کنید، برای هر عدد مختلط z ,

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad \text{و} \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

حل: داریم:

$$z = a + bi = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

و $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ بنابراین:

$$(\operatorname{Re} z)^2 \leq |z|^2 \Rightarrow |\operatorname{Re} z| \leq |z| \Rightarrow \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|$$

$$(\operatorname{Im} z)^2 \leq |z|^2 \Rightarrow |\operatorname{Im} z| \leq |z| \Rightarrow \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

مثال ۱۰: نابرابری مثلث را ثابت کنید. یعنی؛ نشان دهید برای هر z_1 و

$$|z_1 + z_p| \leq |z_1| + |z_p| \quad \text{در } C \text{ داریم:}$$

تعبیر هندسی این نامساوی را بعداً خواهیم گفت.

حل: داریم بنابر مثال ۷ و سپس ۶ و آنگاه مثال ۹ و بعد مثال ۸:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_p|^2 &= (z_1 + z_p)(\overline{z_1 + z_p}) = (z_1 + z_p)(\bar{z}_1 + \bar{z}_p) = \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_p + z_p \bar{z}_1 + z_p \bar{z}_p = |z_1|^2 + z_1 \bar{z}_p + \overline{z_1 \bar{z}_p} \\ &+ |z_p|^2 = |z_1|^2 + |z_p|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_p) \end{aligned}$$

$$i^{2k+2} = 1, i^2 = -1, i^{2k+2} = 1, i^2 = -1$$

مثال ۶: ثابت کنید برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_p ، داریم:

$$\overline{z_1 \pm z_p} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_p, \quad \overline{z_1 z_p} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_p, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_p} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_p}$$

حل: قرار می‌دهیم:

$$z_1 = (a, b), \quad z_p = (c, d)$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} z_1 \mp z_p &= (a \mp c, b \mp d) \Rightarrow \overline{z_1 \mp z_p} = (a \mp c, -(b \mp d)) \\ &= (a, -b) \mp (c, -d) = \bar{z}_1 \mp \bar{z}_p \end{aligned}$$

به همین نحو برای ضرب داریم:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_p} &= \overline{(ac - bd, ad + bc)} = (ac - bd, -(ad + bc)) \\ &= (ac - (-b)(-d), a(-d) + b(-c)) = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_p \end{aligned}$$

و چون برای هر $z \in C, z \neq 0$ ، داریم:

$$\begin{aligned} z = (a, b) &\Rightarrow \overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)} \\ &= \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right) = \frac{z}{|z|^2} \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{z_1}{z_p} \right)} &= \overline{(z_1 z_p^{-1})} = \bar{z}_1 (\bar{z}_p^{-1}) = \bar{z}_1 \cdot \left(\frac{z_p}{|z_p|^2} \right) \\ &= \frac{\bar{z}_1 \cdot z_p}{\bar{z}_p \cdot z_p} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_p} \end{aligned}$$

مثال ۷: ثابت کنید برای هر $z \in C, z \neq 0$ ، $z \bar{z} = |z|^2$.

حل: فرض کنیم $z = (a, b)$ آنگاه

$$\begin{aligned} z \bar{z} &= (a, b)(a, -b) = (a^2 + b^2, -ab + ba) = (a^2 + b^2, 0) \\ &= a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

مثال ۸: ثابت کنید برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_p

$$|z_1 z_p| = |z_1| |z_p|, \quad \left| \frac{z_1}{z_p} \right| = \frac{|z_1|}{|z_p|}$$

$$az^2 + bz + c = 0 \quad a \neq 0$$

که در آن a, b, c اعداد مختلطند، از فرمول مشابه حالت حقیقی به دست می‌آید.

حل: در این جا نیز عیناً همان کاری را که در حالت حقیقی انجام می‌دادیم، عمل می‌کنیم:

$$az^2 + bz + c = a \left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} \right) = 0$$

بنابراین:

$$a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = 0 \Rightarrow z = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{که در آن}$$

مثال ۱۴: ثابت کنید اگر $a, b, c \in \mathbb{R}$ و t یک ریشه معادله درجه دوم

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (5)$$

باشد آنگاه ریشه دیگر آن $\bar{z}_1$ یعنی مزدوج z_1 است.

حل: چون z_1 ریشه معادله (۵) است، بنابراین در آن صدق می‌کند، یعنی:

$$az_1^2 + bz_1 + c = 0$$

حال از دو طرف این رابطه مزدوج می‌گیریم و دقت می‌کنیم که هرگاه

$z \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $z = \bar{z}$ بنابراین:

$$0 = \overline{0} = \overline{az_1^2 + bz_1 + c} = \overline{a} \bar{z}_1^2 + \bar{b} \bar{z}_1 + \bar{c} = a \bar{z}_1^2 + b \bar{z}_1 + c$$

و چون بنابر قضیه اساسی جبر، معادله (۵) حداکثر دو ریشه در $\mathbb{C}$ دارد، پس تنها ریشه‌های آن z_1 و $\bar{z}_1$ هستند. بدین ترتیب ثابت کردیم ریشه‌های هر معادله درجه دوم مختلط با ضرایب حقیقی، مزدوج هم هستند.

در اثبات مطلب فوق از دو تعمیم استفاده کردیم. یکی تعمیم مثال ۶ - جمع و دیگری تعمیم مثال ۶ - ضرب است. یعنی؛ برای هر تعداد متناهی اعداد مختلط $z_1, z_2, \dots, z_k$ داریم:

$$\overline{z_1 z_2 \dots z_k} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_k$$

و

$$\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_k} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_k$$

بویژه اگر $z_1 = z_2 = \dots = z_k$ ، آنگاه $\overline{(z_1^k)} = (\bar{z}_1)^k$

ادامه دارد



$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ = (|z_1| + |z_2|)^2$$

حال از دو طرف ریشه دوم می‌گیریم و حکم را به دست می‌آوریم.

مثال ۱۱: مطلب موجود در میان برهان مثال بالا را ثابت کنید. یعنی؛ نشان دهید برای هر عدد مختلط z ، داریم:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

حل: فرض کنیم:

$$z = (a, b)$$

آنگاه $\bar{z} = (a, -b)$ و داریم:

$$z + \bar{z} = (a, b) + (a, -b) = (2a, 0) = 2a = 2 \operatorname{Re} z$$

$$z - \bar{z} = (a, b) - (a, -b) = (0, 2b) = 2b = 2 \operatorname{Im} z$$

با تقسیم این روابط بر ۲ حکم به دست می‌آید. بویژه اگر قرار دهیم $z = z_1 \bar{z}_2$ ، آنگاه

$$z + \bar{z} = z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ = 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2$$

مثال ۱۲: نابرابری کوشی را برای $n = 2$ ثابت کنید، یعنی؛ نشان دهید برای هر چهار عدد حقیقی a_1, b_1 و a_2, b_2 داریم:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

حل: بنابر مثال ۸، برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 داریم:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

و همچنین بنابر مثال ۹:

$$|\operatorname{Re} z_1 z_2| \leq |z_1 z_2|$$

حال دو عدد مختلط z_1 و z_2 را با استفاده از چهار عدد فوق به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$z_1 = (a_1, a_2) \quad \text{و} \quad z_2 = (b_1, -b_2)$$

آنگاه

$$\operatorname{Re} z_1 z_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

بنابراین:

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq |z_1| |z_2| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

مثال ۱۳: ثابت کنید، ریشه‌های معادله درجه دوم مختلط