

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

آموزش هنر حل مسئله (ریاضیات تکمیلی)

دوره‌ی دبیرستان

کلیه‌ی رشته‌ها

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

نام کتاب : آموزش هنر حل مسئله (ریاضیات تکمیلی) - ۲۱۱/۳

مؤلفان : یحیی تایش، جواد حاجی‌بابایی و آرش رستگار

ویراستار : افسانه حجّتی طباطبایی

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره‌ی کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی

رسام : هدیه پندار

صفحه‌آرا : محمد پریسای

طراح جلد : طاهره حسن‌زاده

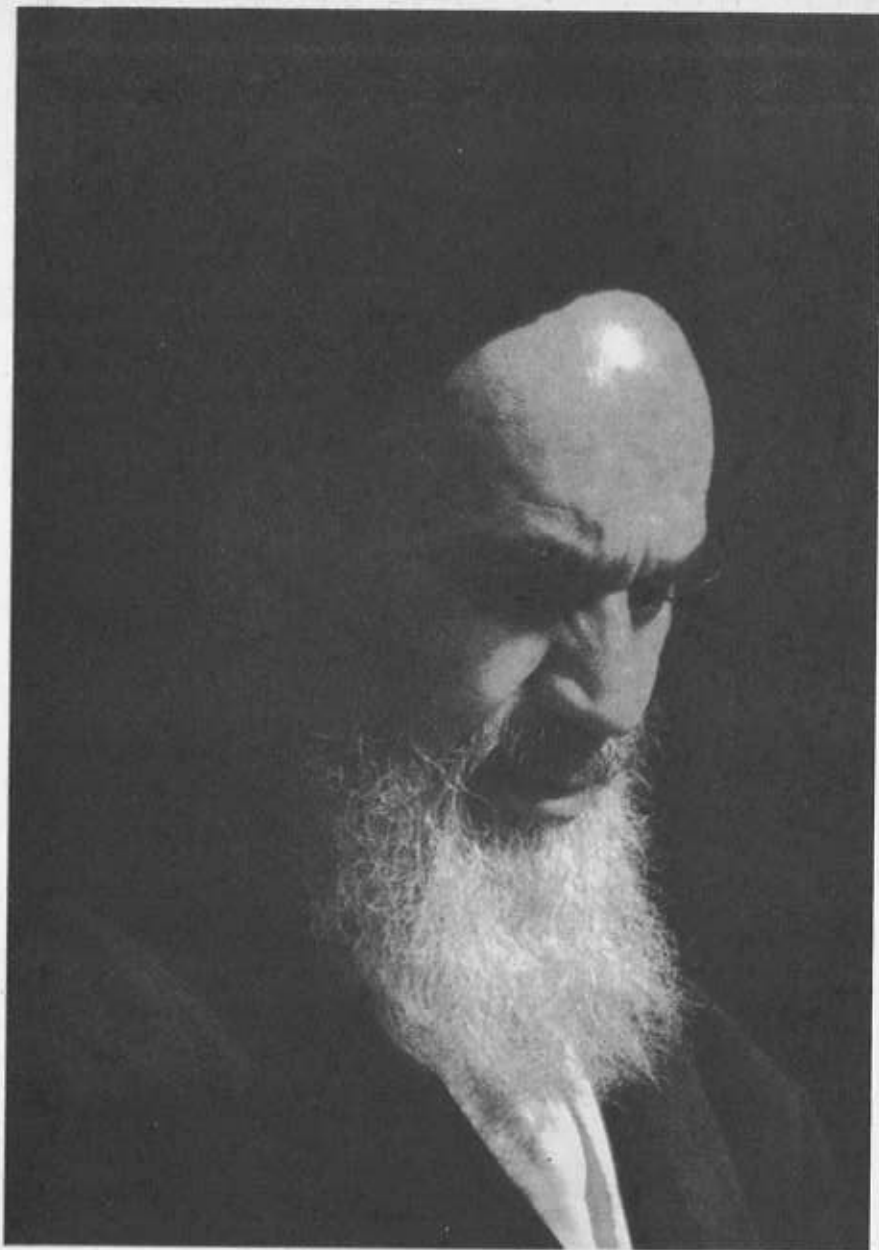
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۵ جاده‌ی مخصوص کرج - خیابان داروبخشن

تلفن : ۴ - ۲۶۲۴۱ - ۶۰، دورنگار : ۲۶۲۴۰ - ۶۰، صندوق پستی : ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : شرکت افست «سهامی عام»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ اول ۱۳۷۹

حق چاپ محفوظ است.



یکی از صفات امام خمینی این بود که تفکرشان بر تبعشان غلبه داشت. یعنی تفکر و اندیشیدن ایشان بیش از تتبع و جستجو کردنشان در کتاب‌ها بود. در درس مکاسب، من تعدادی کتاب به خدمتشان بردم و عرض کردم، این‌ها را هم ملاحظه بفرمایید، فرمودند:

همه را ببرید، من باید خودم فکر کنم، کسی که این همه را نگاه کند، برای فکرش مجال نمی‌ماند.

مطمان محترم و اولیای کرامی دانش آموزان صاحب نظران می توانند نظر اصلاحی خود را در باره ی مطالب
این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۳۶۳/۱۵۸۵۵ - گروه درسی مربوط ارسال نمایند.
دفتر زمانه ی ری و تألیف کتب درسی

فهرست

سپاس

۳	فصل اول: راهبردهای حل مسئله
۴	۱-۱- رسم یک شکل (یا یک تصویر کلی)
۱۳	۲-۱- تنظیم جدول نظام دار
۲۱	۳-۱- حذف حالت های نامطلوب
۳۳	۴-۱- الگویابی
۵۱	۵-۱- حدس و آزمایش
۶۳	۶-۱- زیر مسئله ها (مسئله های درون مسئله)
۷۳	۷-۱- مسئله ی ساده تر و مرتبط با مسئله ی اصلی
۸۷	۸-۱- جبر (روش جبری)
۱۰۵	فصل دوم: الگویابی و نظریه ی اعداد
۱۰۶	۱-۲- تقسیم
۱۱۳	۲-۲- بخش پذیری
۱۲۵	۳-۲- اعداد اول

۱۳۵

فصل سوم: الگویابی هندسی

۱۳۶

۳-۱- الگوهای هندسی در کاشی کاری

۱۴۵

۳-۲- طراحی هنری

۱۵۷

۳-۳- مدلسازی هندسی مسائل زندگی واقعی

۱۶۷

۳-۴- قضیه‌ی فیثاغورس و اثبات‌های بدون کلام!

۱۷۵

فصل چهارم: روش‌های جبری و الگوهای هندسی در نابرابری‌ها

۱۷۶

۴-۱- یک موجود شگفت‌انگیز!

۱۸۳

۴-۲- نابرابری‌های ساده (روش هندسی)

۱۸۹

۴-۳- نابرابری‌های ساده (روش جبری)

۱۹۴

۴-۴- نابرابری مثلثی

۲۰۳

۴-۵- میانگین حسابی - میانگین هندسی

۲۱۷

۴-۶- مهارت تعمیم‌دادن و نابرابری کوشی - شوارتز

۲۲۹

فصل پنجم: در مسیر کشف ریاضیات

۲۳۰

۵-۱- روزگاران قدیم و محصور کردن مرتع‌ها

۲۴۴

۵-۲- همتای چندضلعی‌ها در فضا (کشف دوباره!)

۲۵۲

۵-۳- نقش مشابهت‌ها در پیدایش مفاهیم ریاضی

۲۷۰

۵-۴- همکاری راهبردها در فراز و نشیب حل مسئله

۲۹۵

۵-۵- بازیگری و ساماندهی اطلاعات (داده‌ها)

۳۱۱

فصل ششم: پیرامون پژوهش در ریاضیات

۳۱۷

۶-۱- چگونه یک پژوهش را آغاز کنیم؟

۳۱۲

۶-۲- چگونه پژوهش را ارائه کنیم؟

۳۱۶

۶-۳- پروژه‌های کوچک

۳۳۰

۶-۴- یک مقاله‌ی نمونه

هو اللطیف

ای نام تو بهترین سرآغاز، تو را سیاس؛

ای هستی هرچه هست از تو، به پاس همه‌ی هستی‌ها، هر آن تو را سیاس؛

ای مبدأ علم و مقصد علم، یک‌سر تو را سیاس؛

ای محبوب بی‌کران، بی‌کران تو را سیاس.

درد بر بزرگ معلم انسانیت نبی مکرم اسلام و بر اولیاء برگزیده‌ی خدا، آنان که چراغ راه و اسوه‌ی همه‌ی معلمان‌اند. پیامبر آگاهی و روشنی می‌فرماید: *أَوَّلُ الْعِلْمِ مَعْرِفَةُ الْجَنَّةِ وَ آخِرُ الْعِلْمِ تَقْوِيَةُ الْأَمْرِ إِلَيْهِ*. این سخن آموزگار ماست. درس زیستن و شکوفا شدن است. باید به آن اندیشید. بسیار کسان بوده‌اند که پایان راه به این باور رسیده‌اند. چه زیاست که آغاز با این باور باشد. او را درود که چنین به بارگاه دوست راهمان نمود.

بر خود فرض می‌دانیم از همه‌ی عزیزانی که ما را در این راه یاری کرده‌اند سیاس‌گذاری کنیم.

در جریان تألیف این کتاب تجربه‌ای زیبا و بی‌بدیل به دست آوردیم، تجربه‌ای روشن‌گر و راهگشا. شش نفر از دانش‌آموزان بسیار عزیزی که سال سوم راهنمایی را در مدرسه‌های نور و هاجر (منطقه‌ی ۱۵ تهران) گذرانده و مخاطب این کتاب بودند. هم‌زمان با تألیف، دست‌نوشته‌ها را مطالعه می‌کردند (قسمت اول کتاب) نظرگاه‌ها و احساس خود را بیان می‌کردند. معلمان فرهیخته‌ای نیز ما را در جریان تألیف یاری کرده‌اند. خانم شاهدانی و خانم جلال، آقایان رضایی و لاهوتی، رهنمودهای این عزیزان بسیار ارزشمند بوده است. از همه‌ی این عزیزان متشکریم.

کارشناسان محترم دفتر سرکار خانم غلام آزاد و سرکار خانم بخشعلی‌زاده در نقد و بررسی کارشناسی، تهیه مسائل و پروژه‌ها و تهیه برخی مواد خام ما را یاری کرده‌اند. از نظر ما این همکاران گرامی از اعضای تیم تألیف این کتاب هستند. همکاران گرامی اداره‌ی کل چاپ و توزیع زحمات بسیار و خارج از وظایف قانونی را تحمل کرده‌اند از این عزیزان نیز سیاس‌گذاری و احساس خود را با تقدیم این بیت بیان می‌کنیم:

غلام همت آنم که زیر جریح کبود زهر چه رنگ تعلق پذیرد آزاد است

کتاب برای یک برنامه‌ی دو ساله با دو ساعت تدریس در هفته و برای دانش‌آموزانی که درس ریاضی تکمیلی را انتخاب می‌کنند، برنامه‌ریزی شده است. با این حال ما معتقدیم همه‌ی دانش‌آموزان، مخاطب این کتاب هستند و می‌توانند از آن استفاده کنند. فصل اول کتاب به عنوان قسمت اصلی تدریس در سال اول در نظر گرفته شده است و در صورت باقی بودن زمان، فصل دوم تدریس خواهد شد. ادامه‌ی کتاب در سال دوم و پس از آن در کلاس‌های فوق برنامه در نظر گرفته شده است. فصل آخر کتاب را برای هر دو سال پیشنهاد می‌کنیم به گونه‌ای که در هر سال هر دانش‌آموز دست کم یک پروژه انجام دهد و به صورت مقاله ارائه کند. معلمان گرامی می‌توانند پروژه‌های مناسب دیگری نیز در نظر بگیرند.

اگر از ما بپرسند که هدف اصلی این برنامه چیست؟ پاسخ این است که:

— اگر با معیار عقل پاسخ دهیم، می‌گوییم: آماده کردن نوجوانان برای زندگی با تمرکز بر مهارت‌های تفکر.

— اگر با معیار دل پاسخ دهیم، می‌گوییم: ما درس سحر بر سر میخانه نهادیم!

صد البته معیار ما دل است!

مادر سحر بر سر مخیانه نهادیم

مادر سحر بر سر مخیانه نهادیم



مادر سحر بر سر مخیانه نهادیم

توراه را نشانه‌ای

قله آن بالا است. آن بالا سرزمین صداقت و پاکی هاست. بر فراز قله که می‌رسی دشت‌ها و کوهستان‌های بسیار زیر نظر توست. قله‌های بسیار می‌بینی. رسیدن به آن بالا پر زحمت است؛ پیچ و خم‌ها و فراز و نشیب‌ها دارد. مبارزه‌ای خستگی‌ناپذیر با ضعف‌ها و کاستی‌ها می‌طلبی؛ اراده‌ی قوی و همت بلند می‌خواهی؛ در اوج خستگی و ناتوانی جسمی احساس خستگی قلبی، توانایی، اعتماد به نفس، ایمانند خودباوری و ... می‌کنی. تلاش مادی نیست. در آن جا هیچ کس نیست. جز یکانند؛ تماشاچی نداری؛ شاید فرشتگان برایت کف می‌زنند؛ هر چه راه صعب‌العبورتر و قله بالاتر، لذت بیشتر و ماندگارتر.

حل مسئله در ریاضیات، آموختن یک مینظر شبیه کوهنوردی است؛ همدی این خوبی‌ها را داده. اما در آن به سوی قله‌های اندیشه می‌روی. اگر ناب باشی به سرزمین نور می‌رسی، به آن فکر کن.

راهبردهای 'حل مسئله

در این فصل بعضی از راهبردهای حل مسئله را به کار می‌گیریم و به کمک آن‌ها به حل مسئله‌ها می‌پردازیم. در هر بخش، از یکی از راهبردها استفاده می‌کنیم. در جریان مطالعه‌ی این درس، راه‌حلهایی را مشاهده می‌کنید که برای اولین بار توسط یک دانش‌آموز ارائه شده است. شما نیز می‌توانید راه‌های تازه‌ای برای حل مسئله‌ها ارائه کنید.

شاید این سؤال پیش آید که آیا هر مسئله‌ای از طریق یک راهبرد خاص حل می‌شود؛ در پاسخ این سؤال به این نکته اشاره می‌کنیم که یکی از راه‌هایی که دانش‌آموز را به یک مسئله حل‌کن ماهر تبدیل می‌کند، این است که از طریق راهبردهای گوناگون به حل مسئله بپردازد. عامل دوم که موجب مهارت در حل مسئله می‌شود، دست به عمل زدن و حل کردن تعداد زیادی مسئله است؛ بنابراین، قبل از مطالعه‌ی راه حل مثال‌های کتاب و بررسی آن‌ها برای حل مسئله تلاش کنید. این کار برای شما بسیار سودمند است؛ حتی اگر مسئله را درست حل نکنید. سعی کنید مسئله را برای خودتان قابل درک و ملموس سازید.

بررسی و بحث در مورد راه‌حل‌ها عامل سومی است که دانش‌آموز را به مسئله حل‌کن ماهری تبدیل می‌کند. راه حل‌ها را برای دوستان و هم‌کلاسی‌های خود توضیح دهید تا مورد نقد و سؤال قرار گیرید. سپس، سعی کنید به سؤال‌ها پاسخ منطقی بدهید. احساس خود را نسبت به چگونگی راه‌حل‌ها بیان کنید و در مورد زیبایی آن‌ها قضاوت نمایید. راه‌حل‌های نادرست را کم‌اهمیت بشمارید؛ زیرا گاه نسبت به راه‌حل‌های معمولی حاوی نکات زیباتر و ارزشمندتری هستند. همیشه پس از این که مسئله‌ای را حل کردید، راه‌حل آن را با دقت بسیار بنویسید.

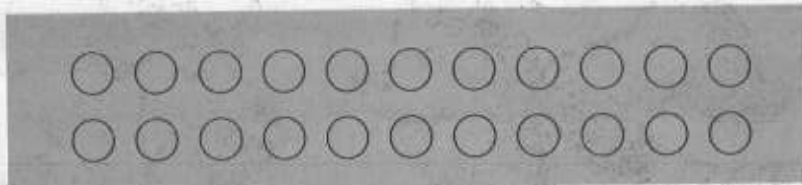
۱-۱- رسم یک شکل (یا یک تصویر کلی)

ضرب‌المثل‌هایی چون «شنیدن کی بود مانند دیدن» و «یک تصویر، با ارزش‌تر از هزار کلمه» از دیرباز رواج داشته است. احتمالاً بسیاری از مردم با این گونه نظریات موافق‌اند اما قدرت و کارایی بعضی از ضرب‌المثل‌ها برای همه‌ی آنان آشکار نیست. یک تصویر یا شکل، در گفت‌وگوها و ارتباط‌های کلامی نقش مؤثری دارد و می‌تواند ارتباط بین مکان‌ها و موقعیت‌های دور از هم را به سادگی و روشنی نشان دهد. نقاشان، طراحان و تصویرگران طنزپرداز افکار خود را با تصاویر، طرح‌ها و نقاشی‌ها قابل مشاهده می‌کنند. در ریاضیات چه طور؟ آیا شکل‌ها و تصویرهای کلی می‌توانند به حل مسئله‌ها کمک کنند؟

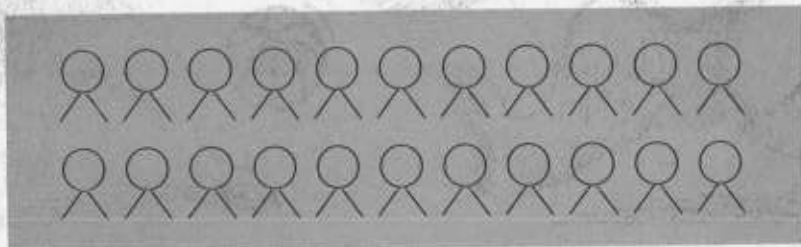
مرغ‌ها و گاوها

یارمحمد کشاورز در مزرعه‌اش از تعدادی گاو و مرغ نگهداری می‌کند. او به خاطر ندارد که از هر کدام از این حیوانات چند تا دارد؛ در حقیقت به دانستن این نکته نیازی ندارد. او می‌داند که روی هم ۲۲ حیوان دارد. به علاوه، می‌داند که گاوها و مرغ‌ها روی هم ۵۶ پا دارند! فرض کنید که هیچ کدام از حیوانات نقص عضو ندارند؛ در این صورت، یارمحمد چند مرغ و چند گاو دارد؟ بهرام که در دوره‌ی ابتدایی درس می‌خواند، این مسئله را به صورت زیر حل کرد.

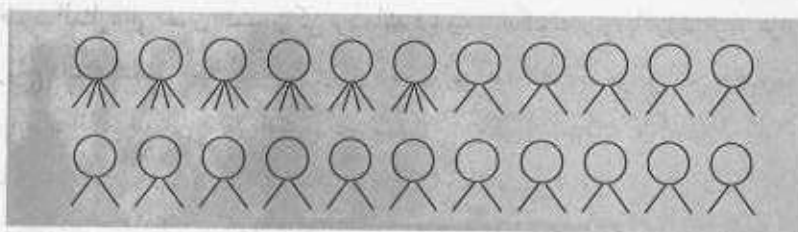
او شکلی رسم کرد و به جای هر حیوان، دایره‌ای کشید!



بهرام نمی‌توانست خوب نقاشی کند؛ به همین دلیل، هر دایره را یک مرغ فرض می‌کرد! او اول همه‌ی حیوانات را مرغ فرض کرد و برای هر کدام، دو پا کشید. سپس، تعداد پاها را شمرد؛ ۴۴ تا



شد. بهرام می‌دانست که تعداد پاها باید ۵۶ تا باشد. به این ترتیب، ۱۲ پا کم بود. به همین دلیل او بعضی از مرغ‌ها را به گاو تبدیل کرد (دو پای دیگر برایشان رسم کرد)! بهرام متوجه شده بود که ۶ تا



بنابراین، پاسخ مسئله ۶ گاو و ۱۶ مرغ است.

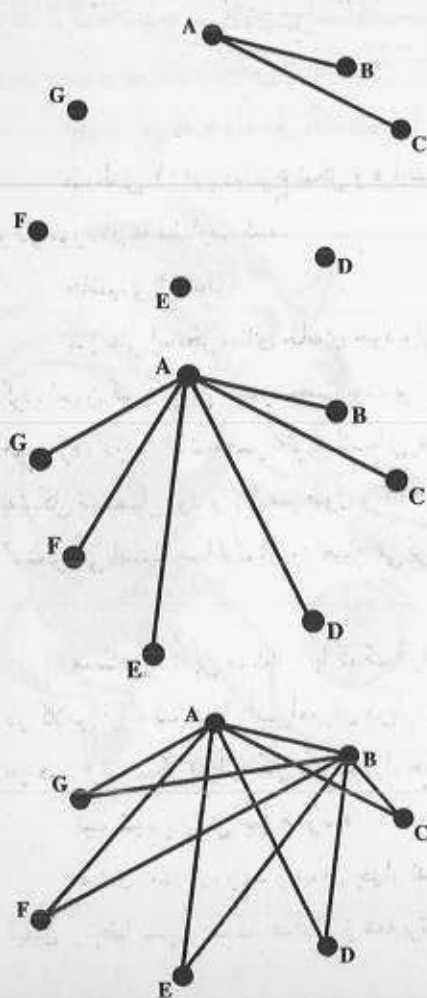
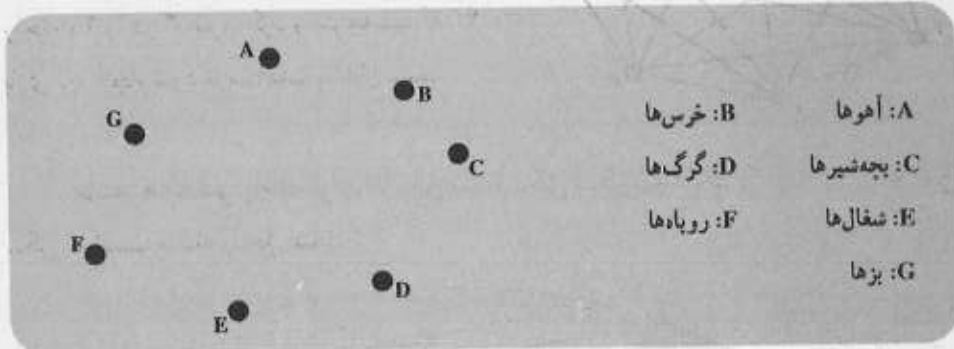
یک دوره مسابقه‌ی بسکتبال!

حیوانات جنگل تصمیم گرفتند به دستور سلطان جنگل یک دوره مسابقه‌ی بسکتبال ترتیب دهند. قرار است هر دو تیم سه بار با یک‌دیگر مسابقه دهند. تیم آهوها، خرس‌ها، روباه‌ها، شغال‌ها، بزها، گرگ‌ها و بچه شیرها در این مسابقات شرکت کرده‌اند. چند بازی باید انجام گیرد تا مسابقات به پایان برسد و قهرمان مشخص شود؟

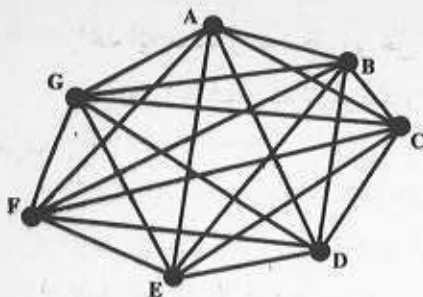
قبل از این که به راه حل نگاه کنید، با دقت به حل این مسئله بپردازید.



را حله این مسئله را به شکل زیر حل کرد:
 او هر تیم را با یک حرف نمایش داد و شکلی رسم کرد که در آن هر تیم با یک نقطه نمایش داده می شد.

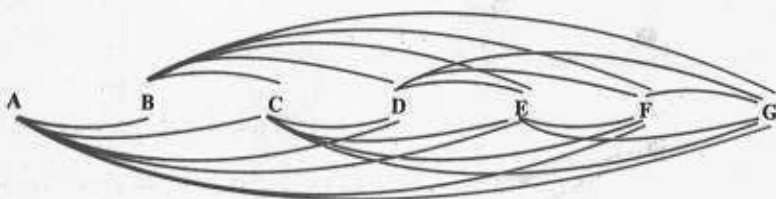


را حله پاره خطی را از A به B وصل کرد و آن را نشانه ای انجام شدن بازی های بین دو تیم آهوها و خرس ها در نظر گرفت. آن گاه خطی از A به C وصل کرد؛ به این معنی که بازی های تیم های آهوها و بچه شیرها انجام شده است. او با اندکی درنگ و تفکر دریافت که اگر پاره خط هایی از A به همه ی نقاط وصل کند، همه ی بازی های تیم A را نشان داده است ولی بقیه ی تیم ها همه ی بازی های خود را انجام نداده بودند؛ او از خود پرسید: اگر تیم خرس ها (B) نیز همه ی بازی هایش را انجام دهد، شکل چگونه خواهد شد؟ راحله برای نشان دادن بازی های تیم خرس ها نیز پاره خط هایی از B به همه ی نقاط رسم کرد. به این ترتیب، خرس ها هم همه ی بازی ها را انجام داده اند ولی بقیه چه طور؟ راحله برای همه ی نقاط، این کار را انجام داد تا همه ی بازی ها را نشان دهد.



تعداد خطوط به ۲۱ رسید و چون طبق قانون مسابقات هر دو تیم باید سه بازی با هم انجام دهند، پس هر خط در واقع نشان دهنده‌ی سه بازی است. راحله ۲۱ را در ۳ ضرب کرد و متوجه شد که ۶۳ بازی باید انجام شود تا مسابقات به پایان برسد.

مهدیه، هم کلاسی راحله، برای حل این مسئله شکل دیگری رسم کرد. او به وسیله‌ی این شکل، توانست مسئله را حل کند.



مسئله‌ی ۱: این دو نوع شکل و فرآیند حل مسئله به کمک آن‌ها را در کلاس به بحث بگذارید و در مورد آن‌ها قضاوت کنید.

حاشیه‌ی استخر

پدر علی استخر شنای خانه‌ی خود را به کمک تعدادی کارگر و به وسیله‌ی بیل و کلنگ جفر کرد. چون کندن زمین بسیار سخت بود، برای صرفه‌جویی در هزینه، او ابتدا نقشه‌ای برای استخر طرح کرد. در این نقشه، پدر علی حاشیه‌ای به پهنای چهار متر پیرامون استخر در نظر گرفت. استخر به شکل مستطیل بود و ۴۰ متر طول و ۱۴ متر عرض داشت. او برای سنگ‌فرش کردن حاشیه‌ی استخر، می‌بایست مساحت آن را تعیین می‌کرد. مساحت حاشیه‌ی استخر را به دست آورید.

مسئله‌ی ۲: این مسئله را با کمک «راهربد رسم شکل» حل کنید و سپس راه حل خودتان را در کلاس ارائه نمایید تا دانش‌آموزان درباره‌ی آن داوری کنند. آیا اگر همه‌ی دانش‌آموزان کلاسی «راهربد رسم شکل» را به کار بگیرند، راه حل‌ها یک‌سان خواهد بود؟

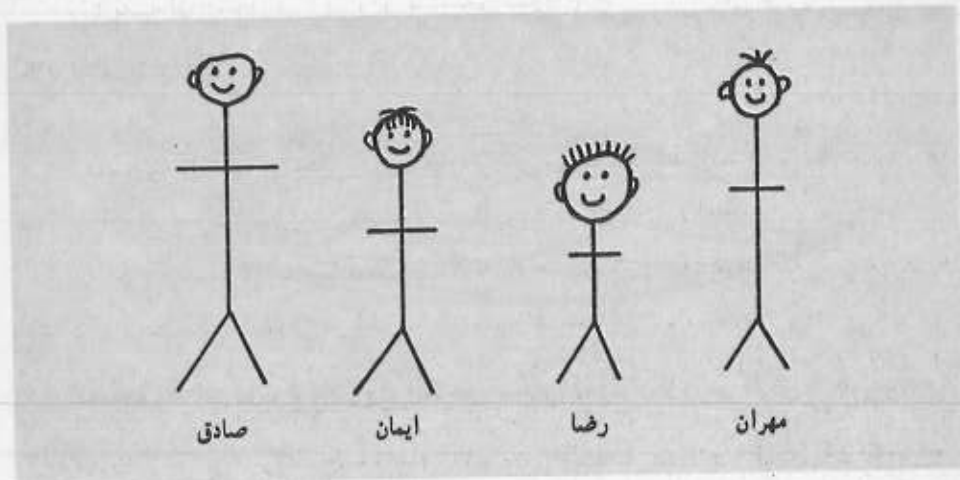
تیم تنیس روی میز مدرسه

صادق، مهران، رضا و ایمان چهار نفر اول رشته‌ی تنیس روی میز مدرسه هستند. مهارت ایمان از رضا بیش‌تر است. صادق از همه برتر است و مهران بالاتر از رضا قرار دارد. رتبه‌ی اعضای

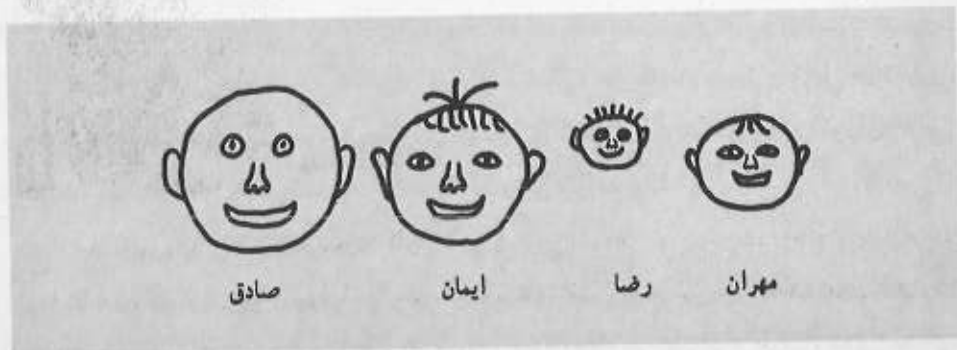
تیم مدرسه را تعیین کنید.

ابتدا روی مسئله کار کنید و بعد، مطالعه را ادامه دهید. مسیر تفکر دانش آموزانی را که این مسئله را به کمک «راهبرد رسم شکل» حل کرده‌اند، با هم بررسی می‌کنیم.

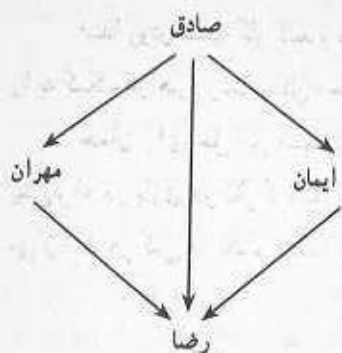
جمال برای حل این مسئله، شکل‌های زیر را رسم کرد. او بلندی قد هر فرد را نماد مهارت پیش‌تر او در بازی در نظر گرفت. پس، هر کس بلندتر است، بازی بهتری دارد. (شاید جمال تصویر می‌کرد که هر کس قد بلندتر باشد، بهتر تنیس روی میز بازی می‌کند!)



سپهیل شکل زیر را رسم کرد. او سر کسی را که بهتر بازی می‌کرد، بزرگ‌تر کشید! (احتمالاً او تصور می‌کرد هر کس سر بزرگ‌تری دارد، بهتر تنیس روی میز بازی می‌کند!) همان‌طور که در شکل می‌بینید، سپهیل سر صادق را از همه بزرگ‌تر و سر رضا را از همه کوچک‌تر رسم کرد. مهران و ایمان را هم کوچک‌تر از صادق و بزرگ‌تر از رضا کشید ولی نمی‌دانست مهران و ایمان نسبت به هم چه وضعی دارند.



رامین از شکل دیگری برای حل این مسئله استفاده کرد. در شکل او، رابطه‌ی بین دو بازیکن



به وسیله‌ی یک پیکان مشخص می‌شود. پیکان از فردی شروع می‌شود که در بازی مهارت بیشتری دارد و بازیکن ضعیف‌تر در انتهای پیکان است. اگر بین دو بازیکن پیکانی نباشد، به این معنی است که رابطه‌ی بین آن‌ها مشخص نیست! شکل رامین این واقعیت را آشکار می‌کند که به سؤال این مسئله نمی‌توان پاسخ داد؛ زیرا برای مقایسه‌ی مهراں و ایمان راهی وجود ندارد!

مسئله‌ی ۳: سه نوع شکلی را که برای حل این مسئله رسم شده است، مقایسه کنید. به نظر شما، چرا «راهبرد رسم شکل» به روش‌های گوناگون به کار گرفته شده است. «راهبرد رسم شکل» به شما کمک می‌کند تا راه حل درست را پیدا کنید. حتی اگر بتوانید بدون استفاده از رسم شکل مسئله را درست حل کنید، باز هم شکل را رسم کنید.

اگر به گذشته فکر کنید، احتمالاً مسائلی را به یاد می‌آورید که برای حل آن‌ها شکلی نکشیده‌اید؛ در این صورت، حتماً تصویرهایی ذهنی داشته‌اید که به شما در حل آن مسئله‌ها کمک کرده است. تحقیقات نشان می‌دهد که مسئله حل‌کن‌های خوب، تقریباً برای حل کردن هر مسئله یک شکل رسم می‌کنند؛ گرچه ممکن است این کار را ذهنی انجام دهند.

کله شقی نکنید! شکل رسم کنید.



مسئله‌ها

۱. مسیر ریل قطار اسباب‌بازی کاوه، دایره‌ای شکل است. شش تیرچه‌ی خطوط ارتباط تلفن به فاصله‌های یک‌سان دور مسیر قرار دارند. ۱۰ ثانیه طول می‌کشد تا قطار از تیرچه‌ی اول به تیرچه‌ی سوم برسد. چه قدر طول می‌کشد تا قطار کل مسیر را دور بزند؟

۲. کرمی در پایین دیواری ۱۲ متری می‌خزد. کرم هر روز ۳ متر به طرف بالا می‌خزد ولی هنگام شب لیز می‌خورد و ۲ متر پایین می‌آید. چند روز طول می‌کشد تا این کرم به بالای دیوار برسد؟

۳. هادی صندوق‌دار یکی از فروشگاه‌های زنجیره‌ای شهر است. ساختمان این فروشگاه چند طبقه است و هادی در طبقه‌ی وسط آن کار می‌کند. یک روز او در آخر وقت کاری خود مرخصی گرفت و در فروشگاه مشغول خرید شد. ابتدا به قسمت لوازم منزل که سه طبقه بالاتر بود، رفت. بعد برای خرید از قسمت بچگانه، پنج طبقه پایین آمد. سپس، شش طبقه بالا رفت تا از قسمت لوازم صوتی خرید کند. در آخر، ده طبقه پایین آمد و از در خروجی اصلی فروشگاه که در طبقه‌ی اول بود، خارج شد. این فروشگاه بزرگ چند طبقه دارد؟

۴. تویی را در نظر بگیرید که از هر ارتفاعی پرتاب شود، نصف مسیر رفته را دوباره به طرف بالا برمی‌گردد. این توپ از ارتفاع ۱۶ متری پرتاب شده و در حال بالا و پایین پریدن است. کل فاصله‌ی عمودی را که این توپ از لحظه‌ی افتادن تا لحظه‌ی پنجمین برخورد با زمین طی می‌کند، حساب کنید.

۵. چه تعداد سرامیک مربع شکل به ضلع $\frac{22}{5}$ سانتی‌متر برای پوشاندن کف سالن مستطیل شکلی به طول $\frac{4}{5}$ متر و عرض $\frac{3}{6}$ متر لازم است؟

۶. ارتش در یک منطقه‌ی صحرایی، چند اردوگاه آموزشی به نام‌های آذرخش، فتح، سعادت، ظفر، پیروزی و هفتاد و هفت برپا کرده است. اردوگاه آذرخش ۱۵ کیلومتر با اردوگاه سعادت فاصله دارد. اردوگاه پیروزی در فاصله‌ی ۱۲ کیلومتری اردوگاه ظفر است. اردوگاه فتح در فاصله‌ی ۶ کیلومتری اردوگاه هفتاد و هفت قرار گرفته است. اردوگاه ظفر ۳ کیلومتر از اردوگاه سعادت فاصله دارد. اردوگاه پیروزی در فاصله‌ی ۹ کیلومتری اردوگاه هفتاد و هفت است. فاصله‌ی اردوگاه پیروزی تا اردوگاه سعادت ۷ کیلومتر است. اردوگاه هفتاد و هفت در فاصله‌ی ۱ کیلومتری اردوگاه آذرخش است. اردوگاه فتح ۱۱ کیلومتر با اردوگاه ظفر فاصله دارد. هیچ دو اردوگاه دیگری از طریق جاده به یک‌دیگر مرتبط نیستند.

در هر یک از موارد زیر، تعیین کنید که کوتاه‌ترین مسیر چند کیلومتر است؟

اردوگاه فتح به اردوگاه پیروزی

اردوگاه ظفر به اردوگاه هفتاد و هفت

اردوگاه سعادت به اردوگاه فتح

اردوگاه آذرخش به اردوگاه ظفر

اردوگاه سعادت به اردوگاه هفتاد و هفت

اردوگاه ظفر به اردوگاه پیروزی

اردوگاه آذرخش به اردوگاه فتح ...
۷. اگر شش نفر در یک جلسه یک دیگر را ملاقات کنند و دوبه دو با هم دست بدهند، عمل دست

دادن روی هم چند بار تکرار می شود؟
۸. بهمن، کمال، ابراهیم، حمید، آرش و رضا در یک مسابقه ی دو ۸۰۰ متر شرکت کردند. در پایان، آرش ۷ متر جلوتر از ابراهیم بود. بهمن ۱۲ متر عقب تر از رضا بود. آرش ۵ متر از حمید جلوتر بود ولی ۳ متر از رضا عقب تر بود. فاصله ی کمال از نفر اول و نفر آخر به یک اندازه بود. آن ها با چه ترتیبی مسابقه را تمام کردند؟ فاصله ی بین هردو نفر آن ها چه قدر بود؟

۹. حاشیه ی استخر لاهیجان: لاهیجان یکی از شهرهای بسیار زیبای استان گیلان است. ساحل زیبای دریای مازندران، باغ های میوه، مزرعه های چای و کوهستان های پوشیده از جنگل جاذبه های گردشگری فراوانی در این منطقه ایجاد کرده است. علاوه بر این، لاهیجان استخر زیبایی نیز دارد. این استخر به شکل دوزنقه ی قائم الزاویه است (تقریباً).

شهردار خوش ذوق و علاقه مند به ریاضیات و هنر تصمیم دارد سنگ فرش های حاشیه ی استخر را تعویض کند. او می خواهد از سنگ فرش هایی با طرح های هندسی زیبا استفاده کند. اگر اندازه ی قاعده ی بزرگ ۳۵ متر، قاعده ی کوچک ۲۵ متر، ساق عمود بر قاعده ۶۰ متر و عرض پیاده رو ۹ متر باشد، چند متر مربع سنگ فرش جدید لازم است؟ اگر اندازه ی ضلع ها ۱۰ برابر شود، چند متر مربع سنگ فرش مورد نیاز خواهد بود؟



۱۰. نشان دهید در هر مهمانی شش نفره، همواره یا سه نفر هستند که دوبه‌دو همدیگر را می‌شناسند یا سه نفر وجود دارند که دوبه‌دو با هم آشنایی ندارند.

۱۱. در یک میدان مسابقه‌ی اتومبیل‌رانی دایره‌شکل، $2n$ خودرو با سرعت‌های مساوی ولی در جهانی که لزوماً یکسان نیستند، در حرکت‌اند. به محض این که دو خودرو به هم می‌رسند، به هم پشت می‌کنند و در جهت مخالف جهت پیشین خود به حرکت ادامه می‌دهند. به نظر شما، پس از گذشت چه مدت زمانی دوباره همه‌ی خودروها با همان جهات اولیه در مکان اولیه‌ی خود قرار می‌گیرند؟

۱۲. دو شهر تهران و کرج از دو مسیر متفاوت جاده‌ی مخصوص و بزرگراه کرج به هم متصل‌اند. اگر دو خودروی پلیس از این دو مسیر متفاوت از تهران به سمت کرج حرکت کنند، می‌توانند حرکت خود را چنان تنظیم کنند که همواره با بی‌سیم در تماس باشند. فرض کنید خودروی پلیس راداری دارد که بُرد آن با بُرد بی‌سیم خودرو برابر است و این رادار می‌تواند خودروهایی را که با سرعت بیش از حد مجاز حرکت می‌کنند، شناسایی کند. نشان دهید اگر خودرویی با سرعت غیرمجاز مسیر بزرگراه کرج را به سمت تهران طی کند و خودروی پلیس از تهران به سمت کرج در مسیر جاده‌ی مخصوص حرکت کند، حتماً با رادار خود خودروی خطاکار را شناسایی می‌کند.

۱۳. آیا برای حل کردن مسائل درس‌های دیگر خود از رسم شکل استفاده کرده‌اید؟ در این باره توضیح دهید.

۱۴. برای مسئله‌ی مرغ‌ها و گاو‌ها چه راه‌حل‌های دیگری به نظرتان می‌رسد؟ از بین همه‌ی راه‌حل‌ها، راهی را که آسان‌تر می‌توان فهمید، با دقت بنویسید.

۱۵. آیا برای مسئله‌ی بسکتبال راه حل دیگری سراغ دارید که در صورت زیاد بودن تعداد تیم‌ها راه‌حل شما پیچیده‌تر نشود؟

۱۶. فهرستی از نمودارهایی که تا به حال برای حل مسئله از آن‌ها استفاده کرده‌اید، تهیه کنید و با دوستان هم‌کلاسی خود آن‌ها را مقایسه کنید.

۱۷. مزیت‌های راهبرد رسم شکل برای حل مسئله را بیان کنید.



۱-۲ - تنظیم جدول نظام دار

سازمان دهی داده‌ها از طریق جدول، ما را یاری می‌دهد تا بتوانیم الگویی را از دل آن‌ها کشف کنیم و اطلاعات پنهان در داده‌ها را به دست آوریم. این کار یکی از روش‌های مؤثر برای دسته‌بندی و مرتب کردن مقدار زیادی داده و اطلاعات است و یکی از راهبردهای ساده ولی کارا برای حل مسئله‌هاست.

پول خُرد

لیلا ۲۵ تومان پول در قفلک دارد اما پول او به صورت یک سکه‌ی ۲۵ تومانی نیست. اگر سکه‌های لیلا یک تومانی، پنج تومانی و ده تومانی باشند، همه‌ی ترکیب‌های ممکن سکه‌ها را که حاصل آن‌ها ۲۵ تومان می‌شود، بیابید.

مثل همیشه قبل از ادامه‌ی مطالعه، روی مسئله کار کنید.

بسیاری از افراد، حل این مسئله را با روش زیر شروع می‌کنند:

بگذارید ببینیم چه می‌توان کرد؟ می‌توانیم پنج سکه‌ی ۵ تومانی یا دو سکه‌ی ۱۰ تومانی و ۱ سکه‌ی ۵ تومانی داشته باشیم. می‌توانیم ۲۵ سکه‌ی یک تومانی داشته باشیم، یا ... آها، می‌توانیم ۱۰ سکه‌ی یک تومانی، ۱ سکه‌ی ده تومانی و ۱ سکه‌ی پنج تومانی داشته باشیم، شاید ما داشته باشیم ...

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، این روشی بی‌قاعده برای بررسی و حل مسئله‌ی یاد شده است. باید همه‌ی حالت‌هایی را که مجموع سکه‌ها ۲۵ تومان می‌شود، پیدا کرد. شاید هرگز نتوان همه‌ی این

حالات را یافت. یک راه بهتر، استفاده از جدولی است که حالت‌های گوناگون به صورت نظام‌دار در آن ثبت شده‌اند. یک جدول نظام‌دار از داده‌ها و اطلاعات باید به گونه‌ای باشد که آن را بتوان بسیار ساده و سریع تنظیم کرد و اطلاعات و داده‌ها را به طور دقیق در آن ثبت نمود. جدول باید طوری تنظیم شود که افراد دیگر هم نظام آن را دریابند و بدون تلاش زیاد آن را تأیید کنند. برای حل این مسئله، جدولی با سه ستون تنظیم می‌کنیم (جدول بالا).

بیش‌ترین تعداد ۱۰ تومانی‌ها در قلمک، دو تا می‌تواند باشد. از همین نقطه شروع می‌کنیم. مرحله‌ی بعد تعیین بیش‌ترین تعداد ۵ تومانی‌هاست. در سطر اول، دو تا ۱۰ تومانی و یک ۵ تومانی و صفر تا ۱ تومانی داریم. حالت بعدی، دو تا ۱۰ تومانی و صفر تا ۵ تومانی و پنج تا ۱ تومانی است. ترکیب دیگری که در آن دو تا ۱۰ تومانی باشد، وجود ندارد؛ بنابراین، ترکیب‌هایی را که یک ۱۰ تومانی دارند، پیدا می‌کنیم. وقتی یک ۱۰ تومانی داریم، بیش‌ترین تعداد ۵ تومانی‌ها سه تا می‌شود و یک تومانی نداریم. ترکیب دیگر در این حالت، یک ۱۰ تومانی، دو ۵ تومانی و پنج ۱ تومانی خواهد بود و به همین ترتیب، با نظم خاصی پیش می‌رویم.

مسئله‌ی ۱: در روش بالا، نظم و ترتیب خاصی را که ترکیب‌ها براساس آن یافت می‌شوند، بیان کنید. یکی از دانش‌آموزان در جریان حل این مسئله جدول روبه‌رو را تنظیم کرد.

۱۰ تومانی	۵ تومانی	۱ تومانی
۲	۱	۰
۲	۰	۵
۱	۳	۰
۱	۲	۵

۱۰ تومانی	۵ تومانی	۱ تومانی
۲	۱	۰
۲	۰	۵
۱	۳	۰
۱	۲	۵
۱	۱	۱۰
۱	۰	۱۵
۰	۵	۰
۰	۴	۵
۰	۳	۱۰
۰	۲	۱۵
۰	۱	۲۰
۰	۰	۲۵

۱۰ تومانی	۵ تومانی	۱ تومانی
۲۵	۰	۰
۲۰	۱	۰
۱۵	۲	۰
۱۵	۰	۱
۱۰	۳	۰
۱۰	۱	۱
۵	۴	۰
۵	۲	۱
۵	۰	۲
۰	۵	۰
۰	۳	۱
۰	۱	۲

مسئله ۲: آیا او همه‌ی ترکیب‌های ممکن را به دست آورده است؟

مسئله ۳: روش تنظیم این جدول را شرح دهید و با روش قبلی مقایسه کنید.

مساحت و محیط

مساحت مستطیلی ۱۲۰ سانتی متر مربع است. طول و عرض مستطیل، یک عدد صحیح است.

چند مستطیل با این ویژگی وجود دارد؟ کدام یک از این مستطیل‌ها، کم‌ترین محیط را دارد؟

مسئله ۴: مسئله‌های مساحت و محیط را با کمک «راهِبرد تنظیم جدول نظام‌دار» در کلاس

حل کنید. روش‌های تنظیم جدول را در این مسئله به بحث بگذارید. می‌توانید از «راهِبرد رسم شکل» هم کمک بگیرید.

نکته‌ی ارزشمندی که باید آن را به خاطر بسپاریم، این است که شاید بیش از یک شیوه‌ی درست برای حل یک مسئله وجود داشته باشد. این واقعیت را در بخش قبل، در مسئله‌ی «تیم تنیس روی میز مدرسه» مشاهده کردیم. در مسئله‌ی پول خرد نیز دو شیوه‌ی تنظیم جدول ارائه شد. در مورد به کارگیری راهبردها نیز وضعیت مشابهی وجود دارد؛ یعنی، یک مسئله ممکن است از طریق راهبردهای گوناگون حل شود. در بخش قبل، مسئله‌ی یک دوره مسابقه‌ی بسکتبال با رسم یک شکل حل شد. در این جا همان مسئله را به کمک تنظیم جدول نظام‌دار مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم.

یک دوره مسابقه‌ی بسکتبال

حیوانات جنگل به دستور سلطان جنگل یک دوره مسابقه‌ی بسکتبال ترتیب داده‌اند. قرار است هر دو تیم، سه بار با یک‌دیگر مسابقه بدهند تا قهرمان مشخص شود. تیم آهوها، خرس‌ها، روباه‌ها، شغال‌ها، بزها، گرگ‌ها و بچه شیرها در این مسابقات شرکت کرده‌اند. چند بازی باید انجام شود تا مسابقات به پایان برسند و قهرمان مشخص شود؟

ایست! پیش از مطالعه‌ی راه حل، برای حل مسئله تلاش کنید. البته این بار «راهِبرد تنظیم جدول نظام‌دار» را به کار بگیرید.

جیران به بازی بسکتبال بسیار علاقه دارد و جور کردن بازی بین تیم‌ها برایش جالب است. او برای حل این مسئله جدولی تنظیم کرد و در آن نام هر دو تیمی را که باید با هم بازی کنند، نوشت.

آهوها - گرگ‌ها	گرگ‌ها - بچه شیرها
خرس‌ها - بزها	بزها - آهوها

روباه‌ها - آهوها	گرگ‌ها - بزها
بچه شیرها - شغال‌ها	خرس‌ها - آهوها
گرگ‌ها - بزها	روباه‌ها - شغال‌ها
شغال‌ها - خرس‌ها	بچه شیرها - بزها
گرگ‌ها - بزها	گرگ‌ها - آهوها
شغال‌ها - بچه شیرها	بچه شیرها - خرس‌ها
خرس‌ها - شغال‌ها	بزها - شغال‌ها

آیا جدول جبران نظام دار است؟ آیا او همه‌ی حالت‌های ممکن را در نظر گرفته است؟ آیا موارد از قلم افتاده یا تکراری در این جدول وجود ندارد؟

ملیحه، هم کلاسی جبران، که به بازی شطرنج خیلی علاقه‌مند است و به بازی بسکتبال علاقه‌ای ندارد، مسئله را به روش دیگری حل کرد. او ابتدا تیم‌ها را به شیوه‌ای تازه نام‌گذاری (نمادگذاری) کرد.

آهوها، خرس‌ها، گرگ‌ها، بچه شیرها، شغال‌ها، روباه‌ها، بزها

G F E D C B A

سپس، از تیم آهوها شروع کرد! بازی بین آهوها و خرس‌ها را با AB نشان داد و بعد، بازی بین آهوها و تیم‌های دیگر را فهرست کرد. به این ترتیب، آهوها باید با هر شش تیم دیگر بازی کنند.

AB	BA
AC	BC
AD	BD
AE	BE
AF	BF
AG	BG

ملیحه آن گاه به سراغ تیم بعدی یعنی خرس‌ها رفت؛ بازی آن‌ها را با تیم‌های دیگر یادداشت کرد و فوراً متوجه شد که بازی تیم آهوها و خرس‌ها را قبلاً یادداشت کرده است. به همین دلیل، BA را حذف کرد؛ سپس، بقیه‌ی بازی‌ها را به صورت زیر نوشت:

CD	DE	EF	FG
CE	DF	EG	
CF	DG		
CG			

آن گاه یادداشت‌های خود را مرتب کرد و جدول زیر را ترتیب داد.

AB	BC	CD	DE	EF	FG
AC	BD	CE	DF	EG	
AD	BE	CF	DG		
AE	BF	CG			
AF	BG				
AG					

ملیحه با یک محاسبه‌ی ذهنی نوشت: ۶۳ بازی باید انجام گیرد!

مسئله‌ی ۵: راه‌حل مسئله‌ی یک دوره مسابقه‌ی بسکتبال را براساس راهبردهای تنظیم جدول

نظام‌دار و رسم یک شکل مورد بحث قرار دهید. کدام روش را بیش‌تر می‌پسندید؟

سکه‌های پروانه

پروانه ۲۵ سکه‌ی ۱۰ تومانی دارد. او می‌خواهد سکه‌هایش را در سه دسته قرار دهد:

به‌طوری‌که در هر دسته، تعداد سکه‌ها فرد باشد. پروانه از چند راه می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسئله‌ی ۶: این مسئله را با راهبرد تنظیم جدول در کلاس حل کنید و راه‌حل‌ها را به بحث

بگذارید. در مورد روش‌های مختلف تنظیم جدول نیز بحث کنید.





مسئله‌ها

۱. پری قصد دارد با ۶۰۰ تومان پول توجیبی هفتگی اش تعدادی مجله‌ی طنز و جدول بخرد. قیمت هر مجله‌ی طنز ۶۰ تومان و قیمت هر مجله‌ی جدول ۱۲۰ تومان است. او به چند طریق می‌تواند با همه‌ی پولش، مجله‌های طنز و جدول خریداری کند؟ همه‌ی حالت‌های ممکن را در یک جدول تنظیم کنید.

۲. آمنه، بهاره، شبنم و نیلوفر برای پاسخ دادن به یک مسابقه‌ی رادیویی، با مرکز پخش رادیو تماس تلفنی گرفتند. همه‌ی حالت‌های ممکن را برای ترتیب تماس گرفتن این چهار نفر بنویسید.

۳. مدیر یک شرکت برای اجاره‌ی سالانه‌ی چند آپارتمان، دو نوع قرارداد تنظیم کرد. در یکی از این قراردادها اجاره‌ی ماه اول کم است و در دیگری، افزایش اجاره‌بها تدریجی است. در کدام یک از قراردادها، اجاره‌ی آپارتمان در ۹ ماه اول گران‌تر تمام می‌شود؟ کدام یک از قراردادها برای همه‌ی ۱۲ ماه گران‌تر است؟

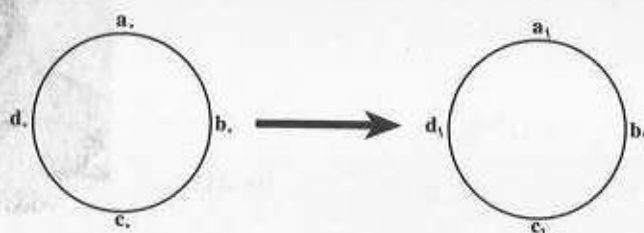
قرارداد الف	قرارداد ب
برای ۱۲ ماه اجاره‌ی آپارتمان ● ۴۰۰۰۰ تومان اجاره‌ی ماه اول ● اجاره‌ی هر ماه ۳۰۰۰ تومان زیاد می‌شود	برای ۱۲ ماه اجاره‌ی آپارتمان ● ۵۰۰۰۰ تومان اجاره‌ی ماه اول ● اجاره‌ی هر ماه ۱۵۰۰ تومان زیاد می‌شود

۴. خانم رضائی به چند طریق می‌تواند یک اسکناس ۵۰ تومانی را به سکه‌های ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی خرد کند؟

۵. حاصل ضرب دو عدد حسابی ۳۶۰ و مجموع آن‌ها کم‌تر از ۱۰۰ است. همه‌ی حالت‌های ممکن برای این دو عدد را بنویسید.

۶. تعاونی مدرسه چندین بسته آب نبات را به قیمت بسته‌ای ۵، ۱۰ و ۱۵ تومان حراج کرده است. کمال ۴۰ تومان پول دارد. همه‌ی راه‌هایی را که او می‌تواند همه یا قسمتی از پولش را برای خرید آب نبات خرج کند، بنویسید.

۷. چهار عدد صحیح نامنفی را روی یک دایره مانند شکل زیر قرار می‌دهیم.



برای هر دو عدد متوالی، قدر مطلق تفاضلشان را محاسبه می‌کنیم و با همان ترتیب مانند شکل بالا روی دایره قرار می‌دهیم. در این جا:

$$d_1 = |d - a| \text{ و } c_1 = |c - d|, b_1 = |b - c|, a_1 = |a - b|$$

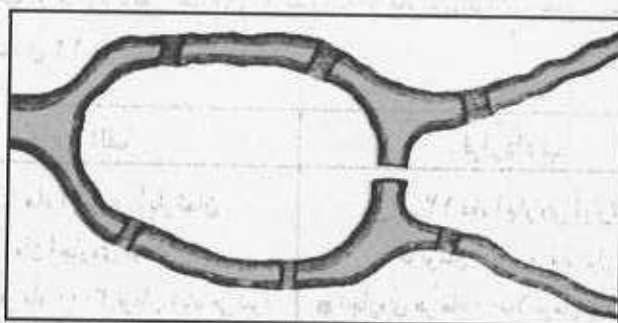
آیا این ادعا صحیح است که با تکرار این عمل سرانجام به چهار عدد صفر روی دایره

می‌رسیم؟

۸. سه دایره در صفحه در نظر بگیرید. در حالات مختلف، این سه دایره ممکن است صفحه را

به چند ناحیه تقسیم کنند؟

۹. در شهر کونیگسبرگ هفت پل روی رود پریگل ساخته شده است، مانند شکل زیر:



آیا می‌توان از یکی از این نواحی شروع به حرکت کرد و از روی تمام پل‌ها بدون تکرار گذشت؟

۱۰. فهرستی از جدول‌هایی که تاکنون برای حل مسئله از آن‌ها استفاده کرده‌اید، تهیه کنید و

با دوستان هم‌کلاسی خود آن‌ها را مقایسه کنید.

۱۱. مزیت‌های راهبرد تنظیم جدول نظام‌دار را در حل مسئله بیان کنید.



۱-۳- حذف حالت‌های نامطلوب

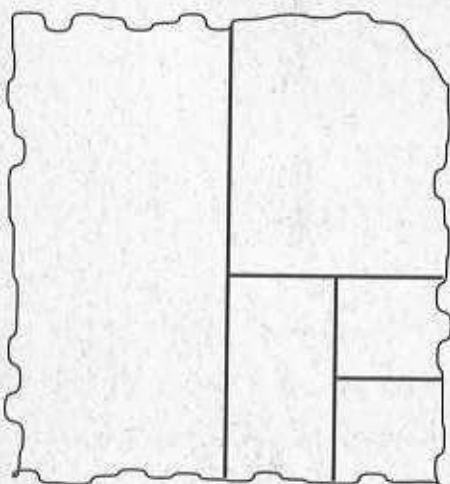
شکار شیر!

روزی شکارچی پیر روش‌های شکار در جنگل را به پسر نوجوانش یاد می‌داد. او برای شکار هر حیوانی روش خاصی به کار می‌برد. ناگهان پسرش از او پرسید: آیا سلطان جنگل را هم می‌توانی شکار کنی؟ شکارچی پیر که با پرسش غیرمنتظره‌ای روبه‌رو شده بود، کمی درنگ کرد؛ سپس با لحنی جدی گفت: اصلاً شیر را می‌گیریم!

پسر پرسید: چگونه؟

پدر روی خاک طرحی کشید و گفت: فرض می‌کنیم این جنگل است و شیری در این جنگل زندگی می‌کند. او جنگل فرضی را به دو قسمت تقسیم کرد و گفت: شیر در یکی از این قسمت‌ها

جنگل



زندگی می‌کند. فرض می‌کنیم در بخش سمت راست باشد. این قسمت از جنگل را هم دو قسمت می‌کنیم. شیر باز هم در هر دو قسمت نمی‌تواند باشد؛ پس فرض می‌کنیم در قسمت بالایی باشد. آن را هم دو قسمت می‌کنیم و ... به همین ترتیب، استدلال‌کنان پیش رفت تا شیر را در بخش کوچکی گیر انداخت؛ سپس گفت: پسر، اکنون کار تمام است. پسر با تعجب گفت: فهمیدم، شکار شیر نه، شکار شیر!

در این داستان طنزگونه، فکر زیبایی

نهفته است و آن روش حذف کردن بخش‌هایی از جنگل است که شیر در آن جا نیست تا این که شکار شیر انجام می‌گیرد!

یکی از بازی‌های فکری که در دوران کودکی و نوجوانی بیش‌تر رواج دارد، «مسابقه‌ی بیست سوالی» است. نوعی از مسابقه‌ی بیست سوالی را که فکری‌تر است و با ریاضی سر و کار بیش‌تری دارد، بررسی می‌کنیم.

بین ۱ تا ۱۰۰، عددی را در ذهن خود انتخاب کنید و از دوستان بخواهید برای شناسایی عدد مورد نظر شما حداکثر ۲۰ سوال مطرح کند و شما فقط جواب «آری» یا «خیر» بدهید. با این فرض که همه‌ی پاسخ‌ها درست باشند، در صورتی که دوست شما بتواند با ۲۰ سوال، عدد انتخابی شما را

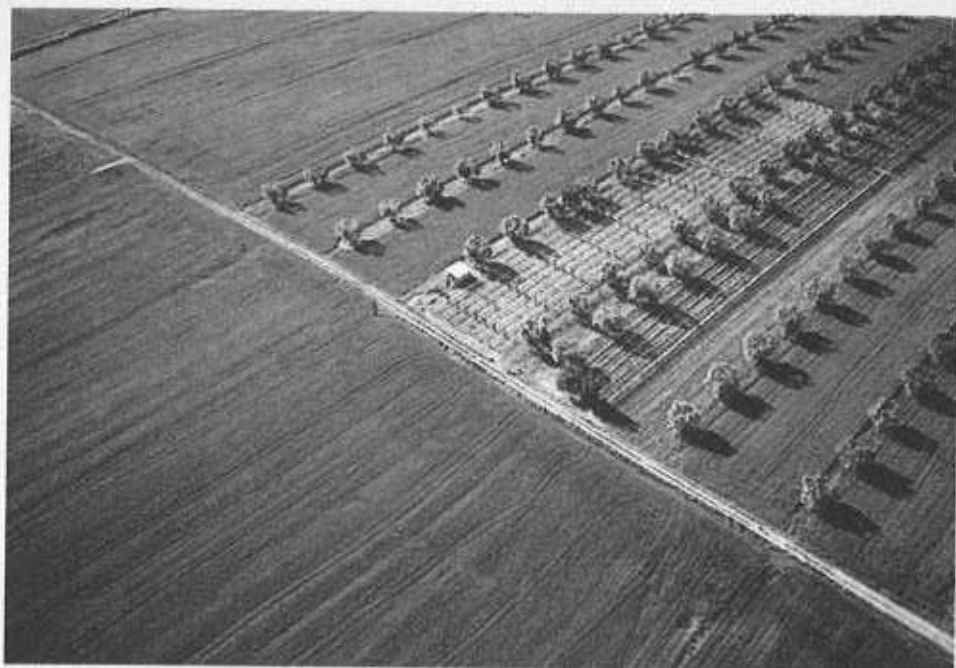
کشف کند، بازی را می‌بازد. یک نمونه مسابقه‌ی بیست سوالی را بررسی می‌کنیم. سوال‌ها و جواب‌ها در زیر آمده است.

سوال	جواب
آیا عدد شما ۱۳ است؟	خیر
آیا از ۵۰ بزرگ‌تر است؟	بله
آیا ۶۲ است؟	خیر
آیا از ۷۵ بزرگ‌تر است؟	بله
آیا عددی فرد است؟	خیر
آیا ۸۳ است؟	خیر
آیا از ۸۵ کوچک‌تر است؟	بله
آیا از ۸۰ هم کوچک‌تر است؟	بله
آیا ۷۶ است؟	خیر
عدد شما ۷۸ نیست؟	بله

کدام سوال‌ها با ارزش است؟ کدام سوال‌ها بی‌ارزش است و موجب از دست رفتن فرصت می‌شود؟

سوال‌های «آیا عدد ۱۳ است؟» و «آیا ۶۲ است؟» سوال‌هایی کم‌ارزش محسوب می‌شوند و تنها حاصل آن‌ها این است که درمی‌یابیم این دو عدد جزء حالت‌های نادرست هستند. سوال «آیا عدد از ۵۰ بزرگ‌تر است؟» سوالی بسیار عالی است؛ زیرا هریک از جواب‌های «بله» یا «خیر» باعث می‌شود ۵۰ عدد را به‌عنوان حالت‌های نادرست حذف کنیم. سوال‌های «آیا از عدد ۷۵ بزرگ‌تر است؟» و «آیا فرد است؟» سوال‌هایی بسیار هوشمندانه هستند ولی سوال «آیا عدد انتخابی ۸۳ است؟» (سوال ششم) سوال خوبی نیست.

مسئله‌ی ۱: این مسئله را با راهبرد «حذف حالات نادرست» حل کنید. اگر حالت تصادفی «عدد شما ۷۸ است؟» یا مشابه آن را در نظر بگیریم، کم‌ترین تعداد سوال را که به‌طور منطقی به کشف عدد انتخابی منجر می‌شود، بررسی کنید و سپس به بحث بگذارید.



رمزگشایی و کار در مزرعه

اسماعیل و ابراهیم فرزندان یک کشاورز نمونه هستند. روزی اسماعیل از پدرش پرسید: پدر، برای گریه‌مان (TOM) چه اتفاقی افتاده است؟ ابراهیم این سؤال را شنید و گفت: ما یک اسب (NAG) هم داشتیم. پدر پاسخ داد: آن گریه‌ی تنبل و اسب پیر به هیچ دردی نمی‌خوردند. من آن‌ها را با بُز (GOAT) جدیدمان عوض کردم. اسماعیل که زبان انگلیسی را خوب می‌دانست، گفت: به نظر می‌آید که در نام‌های انگلیسی این حیوان‌ها یک مسئله‌ی رمزگشایی جالب وجود داشته باشد. آن‌ها تصمیم گرفتند این مسئله را در وقت استراحت حل کنند. قانون‌های حاکم بر مسئله به این صورت است که هر حرف نمایانگر یک رقم از ۰ تا ۹ است. هیچ دو حرفی نمایانگر یک رقم نیست و تساوی زیر نیز برقرار است:

$$TOM + NAG = GOAT$$

تعیین کنید هر یک از این حروف نمایانگر کدام رقم است.

قبل از ادامه‌ی مطالعه، روی این مسئله کار کنید.

دانش‌آموزان یک کلاس پس از کار کردن روی این مسئله، تعدادی از راه‌حل‌ها را روی تخته‌ی کلاس نوشتند و به بحث در مورد راه‌حل‌ها پرداختند. در این جا بعضی از راه‌حل‌ها را بررسی می‌کنیم.

یوسف راه حل خود را این گونه توضیح داد: من با این نکته شروع کردم که G باید ۱ باشد؛ زیرا جمع دو عدد سه رقمی حتماً کم تر از ۲۰۰۰ است؛ به دلیل این که اگر بزرگ ترین عدد سه رقمی - یعنی ۹۹۹ - را با خودش جمع کنیم، داریم:

$$999 + 999 = 1998$$

بنابراین، G باید ۱ باشد. پس ۱ را زیر حرف G می نویسیم.

$$\begin{array}{r} T O M \\ + N A G \\ \hline G O A T \end{array}$$

سپس در مسئله گیر کردم. من واقعاً مطمئن نبودم که در ادامه، باید چه کاری انجام دهم؛ بنابراین، عددهایی را که حدس می زدم، مرتب کردم. به O نگاه کردم و متوجه شدم که O و A هر دو در مکان دهگان قرار دارند و باید با هم جمع شوند و $O + A = A$ که خیلی جالب شد. فهمیدم که O باید صفر باشد. صفر را هم زیر O نوشتم.

$$\begin{array}{r} T O M \\ \quad \textcircled{0} \\ + N A G \\ \hline G O A T \end{array}$$

از این که O صفر و G، ۱ است، نتیجه گرفتم که $T + N = 10$ ؛ بنابراین، دو عددی که جمع آنها ۱۰ شود و ۰ و ۱ هم نباشد! ۷ و ۳ را برای T و N انتخاب کردم. روشن شد که M باید ۶ باشد (چرا؟) سپس عدد ۴ را به جای A قرار دادم.

$$\begin{array}{r} T O M \\ \textcircled{7} \textcircled{0} \textcircled{9} \\ + N A G \\ \textcircled{7} \textcircled{4} \textcircled{1} \\ \hline G O A T \\ \textcircled{1} \textcircled{0} \textcircled{4} \textcircled{7} \end{array}$$

بهمن راه حل خود را این گونه شرح داد: من هم روش یوسف را برای حل مسئله به کار بردم ولی برای T عدد ۶ و برای N عدد ۴ را انتخاب کردم. وقتی به A رسیدم، متوجه شدم که هر رقمی را که تاکنون به کار نرفته است، می توان به جای A نوشت؛ بنابراین، تعدادی جواب دیگر

به دست آوردم.

$$\begin{array}{r} \text{T O M} \\ \textcircled{2} \textcircled{0} \textcircled{5} \\ + \text{N A G} \\ \textcircled{7} \textcircled{4} \textcircled{1} \\ \hline \text{G O A T} \\ \textcircled{1} \textcircled{0} \textcircled{9} \textcircled{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{T O M} \\ \textcircled{2} \textcircled{0} \textcircled{5} \\ + \text{N A G} \\ \textcircled{7} \textcircled{4} \textcircled{1} \\ \hline \text{G O A T} \\ \textcircled{1} \textcircled{0} \textcircled{9} \textcircled{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{T O M} \\ \textcircled{2} \textcircled{0} \textcircled{5} \\ + \text{N A G} \\ \textcircled{7} \textcircled{4} \textcircled{1} \\ \hline \text{G O A T} \\ \textcircled{1} \textcircled{0} \textcircled{9} \textcircled{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{T O M} \\ \textcircled{2} \textcircled{0} \textcircled{5} \\ + \text{N A G} \\ \textcircled{7} \textcircled{4} \textcircled{1} \\ \hline \text{G O A T} \\ \textcircled{1} \textcircled{0} \textcircled{9} \textcircled{6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{T O M} \\ \textcircled{2} \textcircled{0} \textcircled{5} \\ + \text{N A G} \\ \textcircled{7} \textcircled{4} \textcircled{1} \\ \hline \text{G O A T} \\ \textcircled{1} \textcircled{0} \textcircled{9} \textcircled{6} \end{array}$$

آیا مسئله حل شده است؟

جمال راه حل خود را به این ترتیب توضیح داد:

من همان روش یوسف و بهمن را به کار گرفتم؛ با این تفاوت که متوجه شدم برای T و N انتخاب‌های دیگری هم وجود دارد که حاصل جمع آن‌ها ۱۰ می‌شود. به همین دلیل، جدول زیر را تنظیم کردم.

N :	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
T :	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

ترکیب ۱ و ۹ و ترکیب ۹ و ۱ را حذف کردم؛ چون G باید ۱ باشد. هم چنین ۵ و ۵ هم قابل قبول نیست؛ چون دو حرف نمی‌توانند نمایانگر یک عدد باشند؛ بنابراین:

N :	۲	۳	۴	۶	۷	۸
T :	۸	۷	۶	۴	۳	۲

به‌خاطر داریم که T باید یک واحد بیش‌تر از M باشد. (چرا؟)؛ بنابراین، M را هم به جدول اضافه کردم.

N :	۲	۳	۴	۶	۷	۸
T :	۸	۷	۶	۴	۳	۲
M :	۷	۶	۵	۳	۲	۱

در این‌جا متوجه شدم که N=۸ و T=۲ پذیرفتنی نیست؛ زیرا در این صورت: M=۱. در حالی که می‌دانیم G برابر ۱ است و دو حرف نمی‌تواند نماد یک عدد باشد.

یک مسئله می تواند از چند راه حل شود. به مسیر این رودخانه نگاه کنید شاید همین ایده را تداعی می کند.

بنابراین، پنج دسته جواب برای مسئله وجود دارد؛ زیرا طبق استدلال بهمن برای هر حالت از جدول بالا می توان همه ی اعداد انتخاب نشده را به A اختصاص داد. احمد نیز به حل مسئله کمک کرد. او توضیح داد: من مانند جمال نتوانستم جواب ها را به دست بیاورم ولی متوجه شدم که در جمع کردن می توانیم ده بر یک داشته باشیم. به نظرم رسید که اگر یک ده بر یک از جمع رقم های یکان داشته باشیم، O می تواند ۹ باشد اما بعداً متوجه شدم که این حالت غیرممکن است؛ زیرا می دانیم که G فقط می تواند ۱ باشد. بنابراین، M باید ۹ باشد تا ده بر یک داشته باشیم. به این ترتیب M و O هر دو ۹ خواهند بود که این غیرممکن است.

$$\begin{array}{r} T M \\ \\ + N A \\ \hline G A \end{array}$$

کامران نکته ی دیگری را اضافه کرد: دلیل دیگری که O نمی تواند ۹ باشد، این است که در کلمه ی GOAT، عدد باید دارای ۱۹ تا صدتایی باشد. در صورتی که این غیرممکن است؛ زیرا تنها راهی که GO برابر ۱۹ می شود، این است که T+N برابر ۱۹ شود. حتی در صورتی که یک ده بر یک از رقم های دهگان داشته باشیم، باز هم T و N هر دو باید ۹ باشند که البته غیرممکن است.

مسئله ۱: احساس خود را نسبت به این مسئله بیان کنید و همه‌ی جواب‌ها را فهرست نمایید. راهبرد حذف حالت‌های نادرست در درون رده‌ی بزرگی از تنظیم و مرتب کردن داده‌ها و اطلاعات اتفاق می‌افتد. در واقع پس از جمع‌آوری و تنظیم اطلاعات و داده‌های مسئله و احتمالاً تنظیم یک جدول، به حذف امکان‌های معینی می‌پردازیم. مسئله‌ی بعدی که به‌عنوان کار در کلاس در نظر گرفته می‌شود، برای همین منظور انتخاب شده است. برای حل آن سعی کنید از راهبرد تنظیم جدول هم کمک بگیرید.

پرتقال فروش

پرتقال فروشی که ظاهراً ساده‌لوح به‌نظر می‌رسید، همسایه‌ی جدید خود را که اتفاقاً معلم ریاضی بود، به میهمانی شام دعوت کرد. پرتقال فروش و همسرش از همسایه و خانواده‌ی او استقبال کردند. همسایه از پرتقال فروش پرسید: بچه‌هایتان کجا هستند؟ پرتقال فروش گفت: مشغول بازی هستند. همسایه پرسید: چند فرزند دارید و هر یک از آن‌ها چندساله است؟ پرتقال فروش با زیرکی جواب داد: سه پسر دارم که حاصل ضرب سن آن‌ها ۷۲ است و مجموع سن آن‌ها با شماره‌ی خانه‌مان



برابر است! همسایه که با مسئله‌ای غیرمنتظره روبه‌رو شده بود، فوراً به در خانه‌ی پرتقال فروش رفت و شماره‌ی آن را نگاه کرد. آن‌گاه بازگشت و گفت: مسئله‌ای مبهم است. پرتقال فروش گفت: ببخشید، حق با شماست، بزرگ‌ترین پسر من به دوچرخه سواری خیلی علاقه دارد!

مسئله ۲: درباره‌ی این مسئله و راه‌حل‌های آن در کلاس درس بحث کنید.

چه کسی دروغ گوست؟

خسرو روزهای چهارشنبه، پنجشنبه و جمعه دروغ می گوید! او در سایر روزهای هفته راست می گوید! فرهاد روزهای سهشنبه، دوشنبه و یکشنبه دروغ گوست و در دیگر روزهای هفته راست می گوید. اگر امروز هر دو آن‌ها بگویند: «من دیروز دروغ گفته‌ام»، تعیین کنید امروز کدام روز هفته است. مثل همیشه قبل از مطالعه‌ی راه حل، روی مسئله کار کنید. دانیال این مسئله را با جست‌وجوی تناقض‌ها حل کرد. او ابتدا جدولی از روزهای هفته را به صورت زیر تنظیم کرد.

جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	
د	د	د	ر	ر	ر	ر	خسرو
ر	ر	ر	د	د	د	ر	فرهاد

دانیال چنین استدلال کرد: فرض می‌کنیم امروز شنبه است. هر دو نفر امروز راست گو هستند؛ بنابراین، وقتی می‌گویند «من دیروز دروغ گفته‌ام»، درست می‌گویند اما در این صورت، دیروز جمعه بوده است و خسرو جمعه‌ها دروغ می‌گوید. چون فرهاد روز جمعه راست می‌گوید، جمله‌ای که امروز گفته نادرست است. در نتیجه، امروز شنبه نخواهد بود.

فرض می‌کنیم امروز یکشنبه باشد؛ امروز خسرو راست گوست؛ پس وقتی می‌گوید «دیروز دروغ گفته‌ام»، درست می‌گوید اما دیروز شنبه می‌شود و خسرو در روز شنبه راست می‌گوید. در نتیجه، امروز نمی‌تواند یکشنبه باشد.

روزهای دوشنبه و سه‌شنبه مشابه روز یکشنبه هستند و نمی‌توانند پاسخ صحیح مسئله باشند. در نهایت، فرض می‌کنیم امروز چهارشنبه باشد. چون خسرو در روز چهارشنبه دروغ می‌گوید، جمله‌ی «دیروز دروغ گفته‌ام» او نادرست است. ممکن است این حالت درست باشد؛ زیرا در روزهای سه‌شنبه خسرو راست گوست. اکنون وضعیت فرهاد را در نظر می‌گیریم. او روز چهارشنبه راست می‌گوید؛ بنابراین، وقتی که می‌گوید «دیروز دروغ گفته‌ام»، باید راست گفته باشد؛ چون او روزهای سه‌شنبه دروغ گوست. پس، نتیجه می‌گیریم که امروز روز چهارشنبه است.

مسئله‌ی ۳: آیا امروز می‌تواند پنجشنبه یا جمعه باشد؟

حذف حالت‌های نادرست و جست‌وجوی تناقض‌ها یکی از راهبردهای با ارزش برای حل مسئله است. با در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها و تنظیم یک جدول، به راحتی می‌توان حالت‌های

نادرست را کنار گذاشت. اگرچه بعضی اوقات این کار آسان نیست، با این حال، بسیاری از حالت‌ها را می‌توان به سرعت حذف کرد. این راهبرد معمولاً در زندگی روزانه مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ برای مثال، هنگامی که برای تهیه‌ی شام یا تماشای یک برنامه‌ی تلویزیونی یا انتخاب یک فیلم در منزل تصمیم‌گیری می‌کنید. اگر هنگام روبه‌رو شدن با مسائل معین، برای حذف حالت‌های نادرست تلاشی هوشیارانه داشته باشید، می‌توانید مهارت‌های حل مسئله‌ی خود را ارتقا دهید.

توجه داشته باشید که برای راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب، استفاده از راهبرد رسم شکل یا تنظیم جدول نظام‌دار بسیار کارآمد است.



مسئله‌ها

۱. جذر ۴۳۵۶ یک عدد صحیح است. بدون استفاده از ماشین حساب، با روش حذف حالت‌های نامطلوب، آن عدد صحیح را تعیین کنید. با همین روش، جذر ۸۴۶۴ را نیز به دست آورید.
۲. سهراب تعداد خط‌های یک صفحه از کتابش را می‌شمرد. وقتی آن‌ها را سه تا سه تا می‌شمرد، دو خط باقی می‌ماند. وقتی آن‌ها را پنج تا پنج تا هم می‌شمرد باز دو خط باقی می‌ماند. ولی وقتی آن‌ها را هفت تا هفت تا می‌شمرد، پنج خط باقی می‌ماند. در آن صفحه چند خط وجود داشت؟
۳. اگر هر بار از تخم‌مرغ‌های داخل سبد دو تا برداریم، یک تخم‌مرغ باقی خواهد ماند. اگر هر بار سه تا برداریم، دو تخم‌مرغ باقی خواهد ماند. اگر هر بار چهار، پنج یا شش تخم‌مرغ برداریم، آن‌گاه به ترتیب سه، چهار و پنج تخم‌مرغ باقی خواهد ماند ولی اگر هر بار هفت تا از آن‌ها برداریم، هیچ تخم‌مرغی در سبد باقی نخواهد ماند. کم‌ترین تعداد تخم‌مرغ‌هایی را که می‌توانسته در سبد بوده باشد، بیابید.

۴. آرش پنج پیکان (نیزه‌ی کوتاه) به سمت صفحه‌ی هدف پرتاب کرد. امتیازهای روی صفحه‌ی هدف ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ بودند. اگر همه‌ی پرتاب‌های او به صفحه‌ی هدف برخورد کرده باشند،

کدام یک از اعداد زیر نمی‌توانند مجموع امتیازهای آرش باشند؟

۱۵، ۱۴، ۶، ۲۶، ۳۱، ۴۲، ۳۰، ۵۸، ۲۳، ۳۸

۵. اگر عدد چهاررقمی $abcd$ را در ۴ ضرب کنید، ترتیب ارقام آن برعکس می‌شود؛ یعنی،

$abcd \times 4 = dcba$. عدد $abcd$ را بیابید (ارقام a, b, c و d متفاوت هستند).

۶. در غرب، داستانی قدیمی در مورد دو تبهکار معروف به نام‌های نلسون و کارسون وجود

دارد. در اعلامیه‌ای که تصویر این دو نفر را به عنوان مجرمان فراری نشان می‌داد، جایزه‌ی بزرگی نیز برای دستگیری آن‌ها در نظر گرفته شده بود ولی مبلغ جایزه را به صورت رمز مشخص کرده بودند. این مسئله باعث شد که اغلب افراد به جای دقت در تصویر این دو نفر برای شناسایی آن‌ها، مشغول حل معمای پاداش دستگیری آن‌ها شوند؛ از جمله خود نلسون و کارسون؛ ولی معمای پاداش به سادگی قابل حل نبود. مجرمان بعد از تلاش زیاد برای حل مسئله و ناکامی در آن، از کلانتر راهنمایی خواستند. کلانتر بعد از دستگیری آن‌ها، به عنوان راهنمایی گفت که

می‌توانند به جای N ، عدد ۵ اقرار دهند. به این ترتیب، آن‌ها در طول دوران محکومیت خود در زندان، توانستند مسئله را حل کنند.

شما نیز این مسئله را حل کنید. دقت کنید که هر حرف دقیقاً نماینده‌ی یک عدد بین ۰ تا ۹ است.

۷. پویا، پیام و بهنام سرگرم دیدن یک مسابقه‌ی فوتبال از تلویزیون بودند. بازی بسیار کسل‌کننده بود؛ از این رو آن‌ها مشغول صحبت کردن در مورد سن خودشان شدند. پویا (که از همه بزرگ‌تر بود) گفت: سن همه‌ی ما بین ۱۱ تا ۳۰ سال است. پیام گفت: مجموع سن‌مان ۷۰ است. بهنام (که از همه کوچک‌تر بود) یک دفعه از جا پرید و گفت: هی، اگر مربع سن‌مان را بنویسیم همه‌ی ارقام بین ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در این سه مربع ظاهر می‌شوند. تعیین کنید که هریک از این سه نفر چندسال دارد؟

۸. طاهره (که از همه بلندقدتر است) از مریم (که وزنش از همه کم‌تر است) مُسِن‌تر است. قد سارا (که از همه مُسِن‌تر است) از ناهید (که وزنش از همه پیش‌تر است) کوتاه‌تر است. هیچ‌کدام از آن‌ها در این دسته‌بندی‌ها دارای رتبه‌ی یکسان نیستند؛ برای مثال، اگر کسی از نظر بلندی قد دومین نفر است، نمی‌تواند از نظر وزن یا سن دومین نفر باشد. این چهار دختر را در هریک از دسته‌بندی‌های سن، وزن و قد رتبه‌بندی کنید.

۹. عدد ۵۰ به صورت مجموع چند عدد طبیعی که لزوماً با هم متفاوت نیستند، نمایش داده شده است. حاصل ضرب این اعداد طبیعی بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای این حاصل ضرب چیست؟

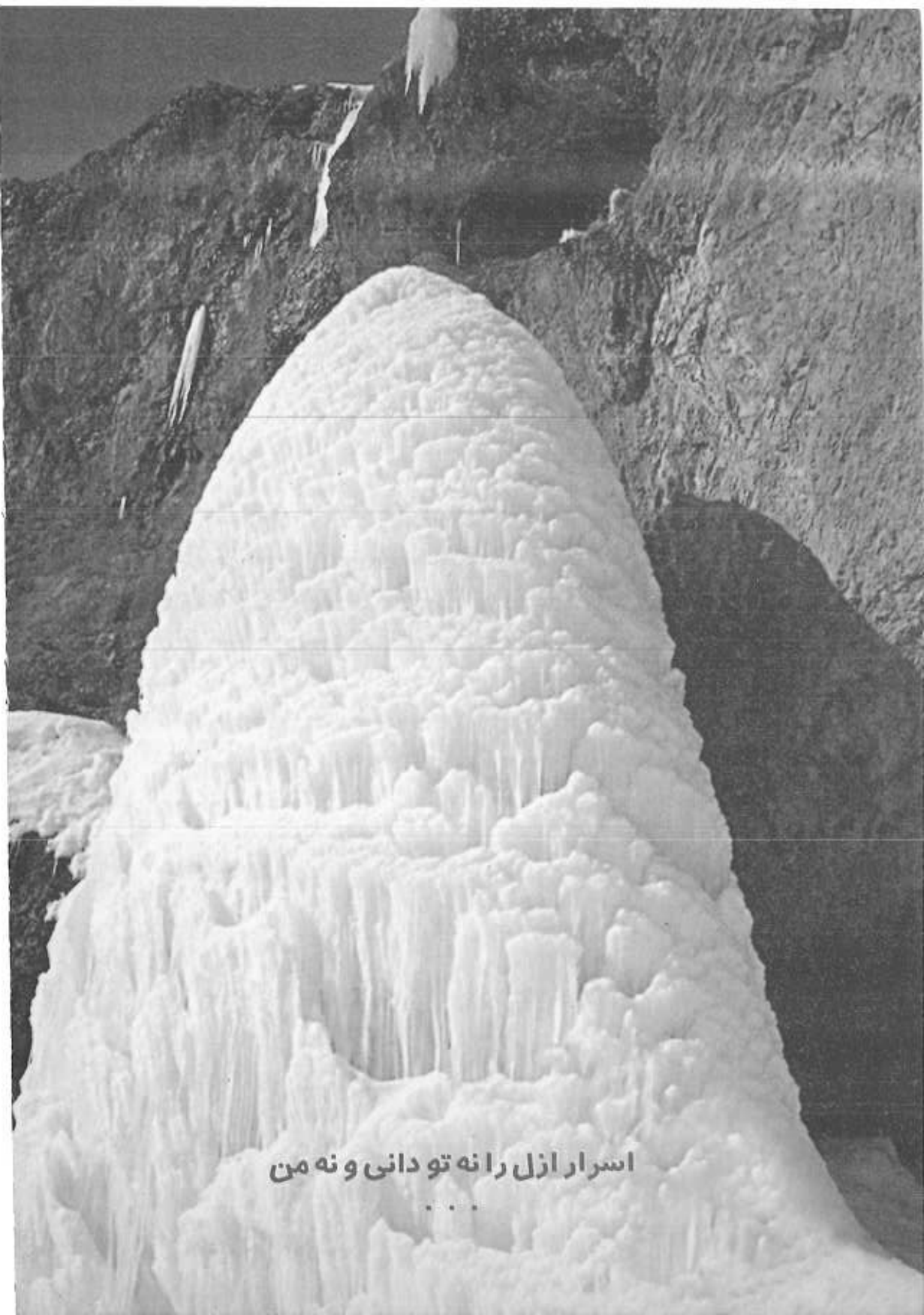
۱۰. مسئله‌ی «هفت هفت»: در تقسیم بی‌باقی مانده‌ی زیر، ستاره‌ها نماینده‌ی ارقامی هستند که ممکن است متمایز نباشند. مقسوم، مقسوم‌علیه و خارج قسمت را تعیین کنید.

$$\begin{array}{r}
 V*** \quad | \quad ****V* \\
 ***** \quad \quad **V** \\
 *****V* \\
 ***** \\
 \hline
 *V***** \\
 *V***** \\
 ***** \\
 *****V* \\
 \hline
 ***** \\

 \end{array}$$

۱۱. اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰۰ را به ترتیب دور دایره‌ای می‌نویسیم. از عدد ۱ شروع می‌کنیم و پانزده عدد در میان، عددها را علامت می‌زنیم (یعنی ۱، ۱۶، ۳۱ و ...). این فرآیند را آن قدر ادامه می‌دهیم تا به عددی که قبلاً علامت خورده برسیم. چند عدد علامت نخورده باقی خواهد ماند؟
۱۲. چند مسئله طرح کنید که در آن‌ها بتوان از چند روش مختلف، حالت‌های نامطلوب را حذف و مسئله را حل کرد.
۱۳. مزیت‌ها و نقایص روش حذف حالت‌های نامطلوب را بیان کنید.
۱۴. آیا اخیراً در زندگی روزانه‌ی خود در خارج از مدرسه، از راهبردهایی که تاکنون آموخته‌اید استفاده کرده‌اید؟





اسرار ازل را نه تو دانی و نه من

...

۱-۴- الگویابی



اهمیت مطالعه‌ی الگوها به حدّی است که ریاضیات را علم الگوها نیز نامیده‌اند. الگوها در همه‌جا حضور دارند؛ در زندگی روزانه هزاران الگو وجود دارد. طراحی‌های صنعتی، رفت و آمد وسایل نقلیه، برنامه‌های تلویزیونی، سنگ‌فرش خیابان‌ها و منازل و

پارک‌ها، طراحی‌های هنری و معماری همگی نشانه‌هایی از وجود الگوها در زندگی روزانه هستند. نگاه آگاهانه و دقیق برای یافتن الگوها مهارتی مهم است که وجود آن برای حل مسئله و به‌طور کلی، مطالعه‌ی هستی ضرورت دارد. توانایی الگویابی موجب می‌شود که مسائل پیچیده به حدّ الگوها تنزّل یابند و با استفاده از الگو به حل مسئله نایل شویم. معمولاً کلید یافتن یک الگو، سازمان‌دهی و تنظیم داده‌هاست. به همین دلیل، راهبردهای ارائه شده مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این بخش به الگوهای عددی می‌پردازیم.

نیاز به اعداد از نخستین نیازهای زندگی بشر بوده و هنوز هم به عنوان یک نیاز مطرح است. پیدایش عددها به کهن‌ترین دوران برمی‌گردد؛ زمانی که انسان به نیاز خود به محاسبه‌ی کمی و بیشی و شمارش پی برد. او ابتدا اعدادی را که برای شمارش به کار می‌رفتند، ابداع کرد. این عددها را اعداد طبیعی می‌گویند.

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ...

اعداد طبیعی:

بعدها هندی‌ها صفر را ابداع کردند. سپس، اعداد منفی نیز ابداع شدند و همگی، اعداد صحیح را تشکیل دادند.

..., -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، ...

اعداد صحیح:

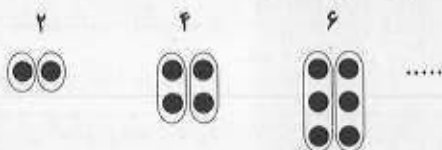
از آثار تاریخی در مورد ریاضیات، چنین استنباط می‌شود که اعداد را با نقاط هم نشان می‌داده‌اند.



نمایش اعداد با نقطه‌ها و ساختن شکل‌هایی به وسیله‌ی نقطه‌ها، باعث شناسایی الگوهایی در بین اعداد شده است.

اعداد زوج و فرد را می‌توان با نمایش نقطه تشخیص داد. احتمال دارد که تعریف اعداد زوج و فرد بر این اساس صورت گرفته باشد. اعدادی که تعداد نقطه‌های آن‌ها به دو دسته‌ی برابر تقسیم می‌شود، زوج و اعدادی که این خاصیت را ندارند، فرد هستند.

اعداد طبیعی زوج:



اعداد طبیعی فرد:



در مورد نمایش‌های نقطه‌ای اعداد، در داستانی منسوب به فیثاغورس آمده است:

بازرگان: چه می‌توانی به من بیاموزی؟

فیثاغورس: شمردن را به تو می‌آموزم.

بازرگان: این را که خودم می‌دانم.

فیثاغورس: چگونه می‌شماری؟

بازرگان: یک، دو، سه، چهار، ...

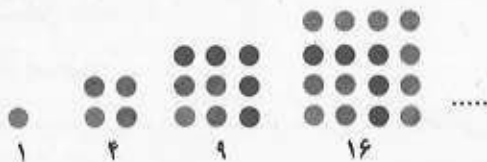
فیثاغورس: خاموش شو! آن‌چه را که تو چهار می‌پنداری، ده است؛ یعنی، مثلی کامل و رمز ما.

دکتر غلامحسین مصاحب - تئوری مقدماتی اعداد

اعداد مثلثی:



اعداد مربعی:



اعداد مثلثی و اعداد مربعی دو الگو از بین اعداد طبیعی هستند که بر اساس نظمی خاص و با الهام از شکل‌های مثلث و مربع کشف شده‌اند. قبل از این که بررسی الگوهای نمایشی اعداد را ادامه دهیم، مفهوم دنباله را معرفی می‌کنیم.

«هر زنجیری (توالی) از اعداد، یک دنباله‌ی عددی است».

در الگویابی در دنباله‌های عددی، به دنبال دست‌یابی به قانون‌مندی حاکم بر دنباله هستیم. قانون‌مندی‌ای که بر اساس آن، می‌توانیم عدد بعدی را در دنباله تعیین کنیم. تذکر: در یک دنباله به هر عدد «جمله» نیز می‌گویند.

دنباله‌ها

الگوی هر دنباله را بیابید و چهار عدد بعدی دنباله (یا چهار جمله بعدی دنباله) را پیش‌بینی کنید. سپس جمله‌ای بنویسید که الگوی دنباله را توضیح دهد.

۱- ۱, ۲, ۴, —, —, —, —

۲- ۱, ۳, ۵, ۷, —, —, —, —

۳- ۱, ۶, ۱۱, ۱۶, —, —, —, —

۴- ۱, ۴, ۹, ۱۶, —, —, —, —

۵- ۱, ۳, ۶, ۱۰, —, —, —, —

۶- ۳, ۶, ۵, ۱۰, ۹, ۱۸, ۱۷, ۳۴, —, —, —, —

۷- ۷۷, ۴۹, ۳۶, ۱۸, — (این دنباله پنج جمله بیش‌تر ندارد!)

پیش از ادامه‌ی مطالعه، بکوشید مسئله را حل کنید.

اولین دنباله، نکته‌ی مهمی در بر دارد.

الف - هر عدد دو برابر می‌شود و عدد بعدی را تولید می‌کند. این قانون در مورد دنباله‌ی (۱)

درست است؛ بنابراین، چهار جمله‌ی (عدد) بعدی به این صورت خواهند بود:

۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴

ب - اگر به جمله‌ی اول یک واحد اضافه شود، جمله‌ی دوم به دست می‌آید. اگر به جمله‌ی

دوم دو واحد اضافه شود، جمله‌ی سوم به دست می‌آید و اگر به جمله‌ی سوم سه واحد اضافه شود،

جمله‌ی چهارم و به همین ترتیب، جمله‌های بعدی دنباله به دست می‌آیند. بنابراین، قانون دنباله به این

ترتیب ادامه پیدا می‌کند.

۱, ۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۶, ۲۲

از سه جمله‌ی اول دنباله، دو قانون متفاوت به دست می‌آید که ادامه‌ی دنباله بر اساس آن‌ها تولید

می‌شود و دو دنباله‌ی متفاوت به دست می‌آید. در نتیجه، بر اساس تعداد جملات یک دنباله بیش از یک

قانون به دست می‌آید و جواب‌های گوناگون حاصل می‌شود.

گویی بهشت آمده از آسمان فرود

۱, ۳, ۵, ۷, ...

دنباله‌ی شماره‌ی ۲ :

آشکارا دیده می‌شود که الگو همان اعداد فرد است. این الگو را می‌توان به روش‌های گوناگون توضیح داد.

الف - الگو همان اعداد فرد است.

ب - اگر به هر عدد (جمله) ۲ واحد اضافه شود، عدد بعدی به دست می‌آید.

پ - برای به دست آوردن هر عدد، تعداد جمله‌ها را تا آن عدد (و خود آن عدد) دو برابر می‌کنیم و سپس یک واحد از آن کم می‌کنیم؛ برای مثال، ۵، سومین جمله است.

$$2 \times 3 - 1 = 5$$

۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ...

دنباله‌ی شماره‌ی ۳ :

برای به دست آوردن عدد جدید، ۵ واحد به عدد قبلی می‌افزاییم. گاهی این قانون را به این صورت بیان می‌کنند :

۱+۵, ۶+۵, ۱۱+۵, ۱۶+۵, ۲۱+۵, ۲۶+۵, ۳۱+۵, ...

۱, ۴, ۹, ۱۶, ...

دنباله‌ی شماره‌ی ۴ :

به این الگو می‌توان از زاویه‌های گوناگون نگاه کرد.

الف - برای به دست آوردن عدد بعدی، یک عدد فرد به آن اضافه می‌شود. برای به دست آوردن عدد بعد از آن، عدد فرد بعدی افزوده می‌شود. این روند را ادامه می‌دهیم؛ یعنی، جمله‌ی اول با ۳ جمع می‌شود و جمله‌ی دوم به دست می‌آید. جمله‌ی دوم با ۵ جمع می‌شود و جمله‌ی سوم به دست

$$1+3, 4+5, 9+7, 16+9, \dots$$

می آید. جمله ی سوم با ۷ جمع می شود و ...

ب - برای به دست آوردن عدد بعدی،

- به عدد اول ۳ تا اضافه می کنیم؛

- به عدد دوم ۲ تا بیش تر از اولی اضافه می کنیم و به هر مرحله ۲ تا بیش تر از مرحله ی پیش

افزوده می شود.

$$1+3, 4+3+2, 9+5+2, 16+7+2, \dots$$

ب - این دنباله، همان دنباله ی اعداد مربعی است؛ یعنی:

$$1=1 \times 1=1^2, 4=2 \times 2=2^2, 9=3 \times 3=3^2, \dots$$

$$1, 3, 6, 10, \dots$$

دنباله ی شماره ی ۵:

به اولین عدد، ۲ واحد، بعد ۳ واحد و بعد از آن ۴ واحد افزوده می شود و به همین ترتیب، هر

بار یک واحد بیشتر از مرحله ی قبل. این قانون را می توان به این صورت نوشت:

$$1+2, 3+3, 6+4, 10+5, 15+6, \dots$$

این دنباله، همان دنباله ی اعداد مثلثی است.

مسئله ی ۱ - با توجه به نمایش نقطه ای اعداد مثلثی و مربعی، برای به دست آوردن شکل بعدی

یک الگوی تصویری براساس نقطه ها ارائه کنید.

$$3, 6, 5, 10, 9, 18, 17, 34, \dots$$

دنباله ی شماره ی ۶:

این دنباله، الگوی متفاوت با دنباله های قبلی دارد. اولین عدد را دو برابر می کنیم؛ عدد دوم

به دست می آید. سپس، یک واحد کم می کنیم؛ عدد سوم حاصل می شود. عدد سوم را دو برابر

می کنیم؛ چهارمی به دست می آید. از عدد چهارم یک واحد کم می کنیم؛ عدد پنجم حاصل می شود.

قانون دو برابر کردن، شماره های زوج را تولید می کند و یک واحد کم کردن از جمله های شماره ی

زوج، اعداد شماره ی فرد را تولید می کند؛ بنابراین:

دنباله ی شماره ی ۷:

$$3, 6=2 \times 3, 5=6-1, 10=2 \times 5, 9=10-1, 18=2 \times 9, \dots$$

این دنباله دارای یک الگوی غیر معمول است و نشان می دهد هنگامی که با الگوها سروکار

داریم، به ذهنی انعطاف پذیر و نگاهی دقیق نیازمندیم.

$$77, 7 \times 7 = 49, 4 \times 9 = 36, 3 \times 6 = 18, 1 \times 8 = 8!$$

الگو را بیان کنید.

$$1+2=3$$

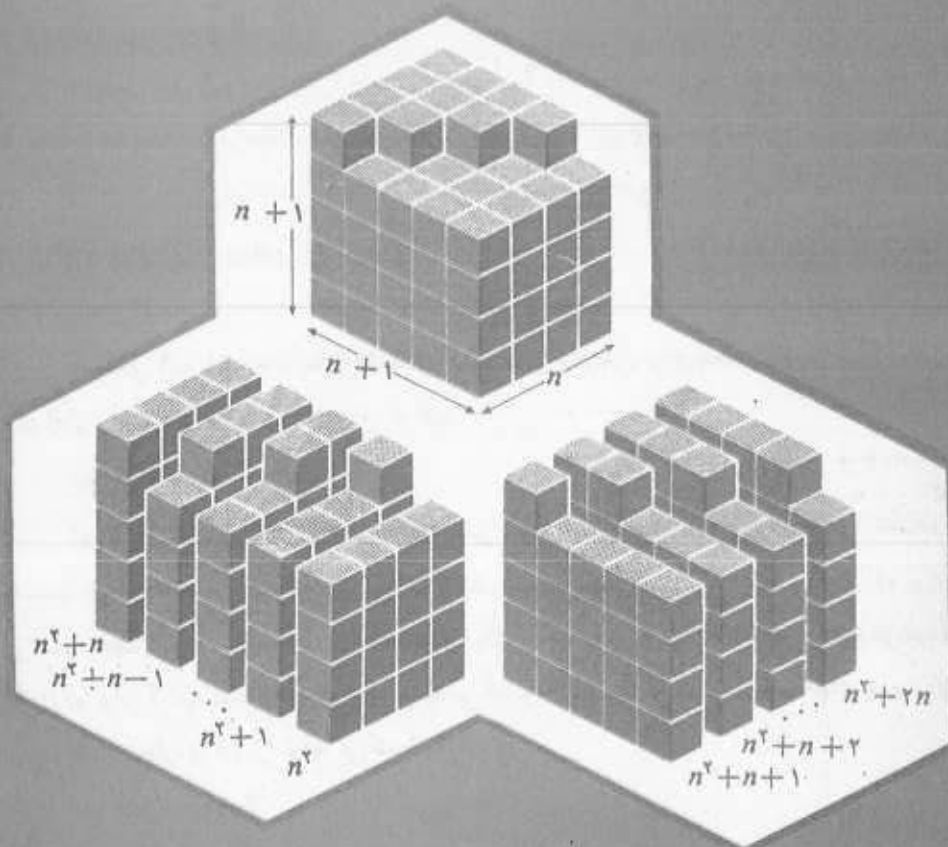
$$4+5+6=7+8$$

$$9+10+11+12=13+14+15$$

$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$

⋮

$$n^2 + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \dots + (n^2 + 2n)$$



درباره‌ی الگوی بالا چه می‌توان گفت؟ به‌طور کامل آن را توصیف کنید.

مسئله‌ی ۲- دنباله‌ی اعداد مثلثی و مربعی براساس نمایش نقطه‌ای و شکل‌های مثلث و مربع کشف شده‌اند. اکنون پنج ضلعی منتظم و شش ضلعی منتظم و نمایش نقطه‌ای اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. بکوشید الگوی اعداد پنج ضلعی گونه و شش ضلعی گونه را کشف کنید. این دو دنباله، اعداد مخمسی و مسدسی نام‌گذاری شده‌اند.

سعی کنید خودتان مسئله را حل کنید. اجازه ندهید دیگران به جای شما فکر کنند.

مسئله‌ی ۳- الگوی مربوط به هر دنباله را کشف کنید و توضیح دهید. سپس چهار جمله‌ی بعدی هر دنباله را بنویسید.

$$۱- ۲, ۳, ۵, ۹, ۱۷, ۳۳, \dots$$

$$۲- ۱, ۵, ۱۳, ۲۹, ۶۱, ۱۲۵, \dots$$

$$۳- ۱, ۴, ۱۳, ۴۰, ۱۲۱, ۳۶۴, \dots$$

هر دو مسئله را در کلاس حل کنید و سپس راه‌حل‌ها را به بحث بگذارید.

قانون کلی الگو

پس از این که یک الگو شناخته شد و قانون آن مشخص گردید، از نمادهای ریاضی استفاده می‌کنیم و قانون الگو را به صورت عبارت‌های ریاضی می‌نویسیم. این کار به ما امکان می‌دهد تا

مسائل واقعی را به کمک ریاضی حل کنیم. در دنباله‌ها، قانون به دست آوردن اعداد (جمله‌های) دنباله را به صورت یک عبارت ریاضی می‌نویسیم. دنباله‌ی اعداد زوج و فرد اولین الگوهای عددی شناخته شده هستند. از راهبرد تنظیم جدول نظام‌دار استفاده می‌کنیم و اعداد زوج و فرد را به صورتی دیگر می‌نویسیم.

$2n$ نمایش عدد زوج شماره n ام است که در این صورت، دنباله‌ی اعداد طبیعی زوج را به این صورت می‌نویسند (n یک عدد طبیعی است):

شماره‌ی عدد زوج	عدد زوج	روش دیگر نمایش عدد زوج
۱	۲	2×1
۲	۴	2×2
۳	۶	2×3
۴	۸	2×4
۵	۱۰	2×5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$2 \times n = 2n$
قانون کلی دنباله‌ی اعداد طبیعی زوج		

۲, ۴, ۶, ۸, ..., ۲n, ...

اعداد طبیعی زوج :

عدد زوج در مجموعه‌ی اعداد صحیح این گونه تعریف می‌شود :

«عدد زوج در مجموعه‌ی اعداد صحیح، به عددی گفته می‌شود که مضرب ۲ باشد.»

به این ترتیب، هر عدد صحیح زوج را می‌توان به صورت $2k$ نوشت که در این جا k یک عدد صحیح است و بنابراین، داریم :

k	۰	۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	...
$2k$	۰	۲	-۲	۴	-۴	۶	-۶	...

شماره‌ی جمله	عدد فرد	روش دیگر
۱	۱	$2 \times 1 - 1$
۲	۳	$2 \times 2 - 1$
۳	۵	$2 \times 3 - 1$
۴	۷	$2 \times 4 - 1$
۵	۹	$2 \times 5 - 1$
۶	۱۱	$2 \times 6 - 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n		$2 \times n - 1 = 2n - 1$

قانون کلی دنباله‌ی اعداد فرد شبیه

اعداد زوج را می‌توان به این صورت

به دست آورد ؛ یعنی، هر عدد طبیعی فرد

را می‌توان به صورت $2n - 1$ نوشت ؛ به

این ترتیب n یک عدد طبیعی است.

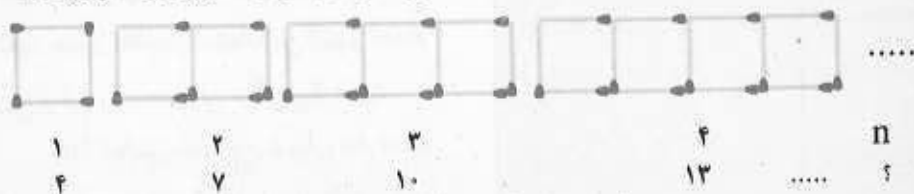
۱, ۳, ۵, ۷, ۹, ..., $2n - 1$, ...

دنباله‌ی اعداد طبیعی فرد

اگر n را یک عدد صحیح فرض کنیم، آن گاه $2n - 1$ همه‌ی اعداد صحیح فرد را تولید می‌کند.

الگو با مربع‌ها، تعداد چوب کبریت‌ها:

الگوی هندسی زیر را در نظر بگیرید و قانون کلی الگو را به زبان کلامی و ریاضی بنویسید.



تعداد مربع یا تعداد چوب کبریت‌ها

اگر به دنباله‌ی تعداد چوب کبریت‌ها دقت کنیم، درمی‌یابیم که اگر به هر جمله، سه واحد اضافه

کنیم، جمله‌ی بعدی به دست می‌آید ؛ بنابراین،

قانون الگو به زبان کلامی:

اگر به هر جمله ۳ واحد اضافه کنیم، جمله ی بعدی به دست می آید. برای نوشتن قانون الگو به زبان ریاضی، جدول زیر را تنظیم می کنیم.

تعداد مربع ها	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد چوب کبریت ها	۴	$7 = 4 + 3$	$10 = 4 + 3 + 3$	$13 = 4 + 3 + 3 + 3$		$?$

از جدول مشخص می شود که وقتی تعداد مربع ها ۲ تا می شود، ۳ واحد به ۴ اضافه می شود؛ وقتی سه مربع داریم، دو تا ۳ اضافه می شود و موقعی که چهار مربع داریم، سه تا ۳ اضافه می شود؛ یعنی، تعداد ۳هایی که اضافه می شود، یکی کم تر از مربع هاست. پس، وقتی n مربع داریم، $n-1$ تا ۳ اضافه می شود و چون ۴ تا مربوط به مربع اولی بوده، بنابراین، وقتی n تا مربع داریم $3(n-1) + 4$ چوب کبریت داریم.

تعداد چوب کبریت ها تعداد مربع ها

$$n \longrightarrow 3(n-1) + 4$$

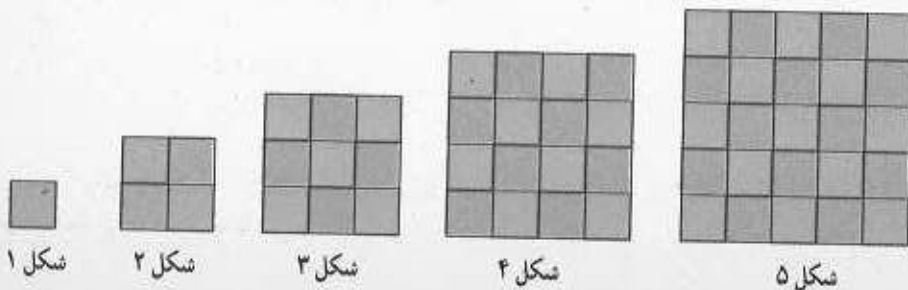
قانون الگو به زبان ریاضی:

$3(n-1) + 4$ وقتی n یک عدد طبیعی باشد، قانون کلی دنباله به زبان ریاضی است. آیا می توان قانون الگو را با روش دیگری به دست آورد؟

مسئله ی ۴- از مشابه مثال مربع ها ایده بگیرید و قانون الگوی پنج ضلعی منتظم و شش ضلعی منتظم را مورد استفاده قرار دهید و هر کدام را به صورت کلامی و به زبان ریاضی بنویسید. برای هر کدام چند الگو وجود دارد؟

الگو با مربع ها، مساحت و محیط:

به وسیله ی مربع هایی به طول ضلع ۱ واحد، دنباله ی شکل های زیر را می سازیم. دنباله ی مساحت ها و محیط های مربع ها را تشکیل دهید و قانون الگوی مساحت ها و محیط ها را به دست آورید.



روند حل مسئله همواره با سختی‌ها و موانع بسیاری همراه بوده است. پیروز شدن بر سختی‌ها و از میان برداشتن موانع موجب شادی و سربلندی و اعتماد به نفس می‌شود. قبل از مطالعه‌ی راه حل، خودتان مسئله را حل کنید.

از راهبرد تنظیم جدول نظام‌دار استفاده می‌کنیم.

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵	...
طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	...
مساحت	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	...
محیط	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	...

تا این جا، داده‌های جدول را براساس شکل‌ها نوشتیم. اکنون به جست‌وجوی نظم و قاعده بین داده‌های جدول می‌پردازیم. در سطر اول و دوم جدول مشاهده می‌کنیم که شماره‌ی شکل، همان طول ضلع مربع بزرگ آن شکل است. نوع ساختن مربع‌های بزرگ و طول ضلع مربع واحد هم این نتیجه‌گیری را تأیید می‌کنند. در سطر سوم، دنباله‌ی عددی $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ به دست می‌آید که همان دنباله‌ی مربعی است. از طرف دیگر، چون این دنباله مساحت‌ها را مشخص می‌کند و مساحت مربع برابر است با یک ضلع به توان ۲ (یک ضلع ضرب در خودش)؛ بنابراین، می‌توانیم این دنباله را براساس مساحت مربع به شکل دیگری بنویسیم:

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$$

بنابراین، شکل 100 در این دنباله مساحت 100^2 و شکل n ام مساحت n^2 دارد. در نتیجه، قانون کلی دنباله‌ی مساحت‌ها به صورت n^2 است.

$$4, 8, 12, 16, 20, \dots$$

دنباله‌ی محیط‌ها عبارت است از:

مشاهده می‌کنیم اختلاف هر دو عدد متوالی ۴ است؛ یعنی، اگر به هر جمله‌ی دنباله ۴ واحد اضافه کنیم، جمله‌ی بعدی به دست می‌آید. از زاویه‌ای دیگر—یعنی محیط شکل‌ها—به این دنباله نگاه می‌کنیم. محیط هر مربع برابر است با چهار برابر ضلع مربع. در نتیجه، با کمک فرمول محیط مربع و دنباله‌ی طول ضلع‌ها، می‌توان جدول زیر را تنظیم کرد.

طول ضلع شکل	۱	۲	۳	۴	۵
محیط شکل	4×1	4×2	4×3	4×4	4×5

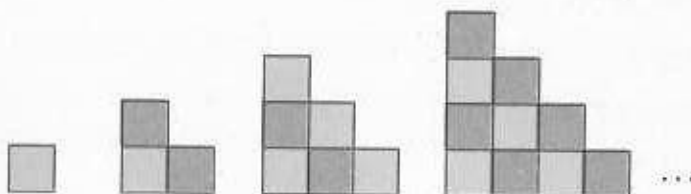
با توجه به جدول، شکل 100 ام محیط $400 = 4 \times 100$ واحد را دارد؛ یعنی، در دنباله‌ی محیط‌ها، صدمین عدد برابر 400 است و شکل n ام محیط $4n$ خواهد داشت؛ بنابراین، قانون کلی

دنباله‌ی محیط‌ها به صورت $4n$ است. با این اطلاعات، جدول را تکمیل می‌کنیم.

...	n	...	۱۰۰	...	۵	۴	۳	۲	۱	شماره‌ی شکل
...	n	...	۱۰۰	...	۵	۴	۳	۲	۱	طول ضلع
...	n^2	...	۱۰۰۰۰	...	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	مساحت
...	$4n$	...	۴۰۰	...	۲۰	۱۶	۱۲	۸	۴	محیط

دنباله‌ی مساحت‌ها و محیط‌ها را با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

مسئله‌ی ۵- شکل‌هایی که از مربع‌ها ساخته می‌شوند و شبیه مثلث هستند. به وسیله‌ی مربع‌های واحد، الگوی از شکل‌ها به صورت زیر می‌سازیم:



الف) دنباله‌ی محیط‌ها و مساحت‌های این الگو را تشکیل دهید.

ب) قانون کلی دنباله‌ی محیط‌ها و مساحت‌ها را به صورت کلامی و با زبان ریاضی بیان کنید.

پ) به الگوی شکل‌ها در این مسئله و الگوی شکل‌های مسئله‌ی قبلی (مربع‌ها) دقت کنید. اگر رابطه‌ای را کشف کردید، سعی کنید آن را به زبان ریاضی بیان کنید.

— راه‌حل‌ها را در کلاس به بحث و بررسی بگذارید.





مسئله‌ها

۱. سه جمله‌ی بعدی هریک از دنباله‌های زیر را بنویسید و الگوی خود را توضیح دهید.

(الف) ۲، ۵، ۱۰، ۱۷، ...

(ب) ۶۴، ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ...

(پ) ۵، ۱۰، ۹، ۱۸، ۱۷، ۳۴، ۳۳، ...

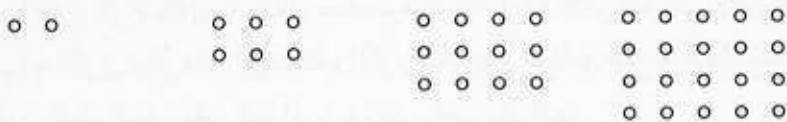
(ت) ۱، ۳، ۷، ۱۳، ۲۱، ...

(ث) ۲، ۳، ۵، ۹، ...

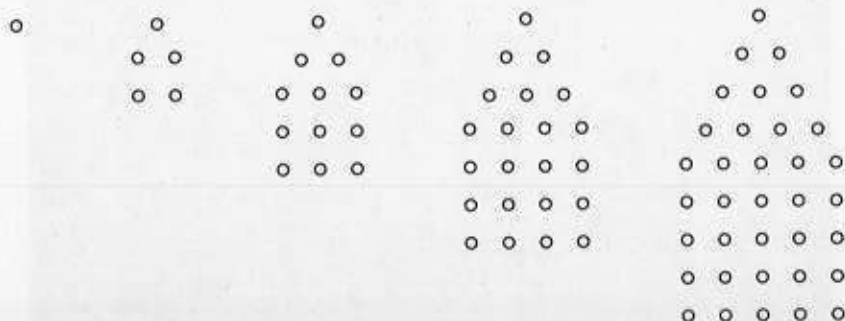
(ج) ۱، ۵، ۱۳، ۲۶، ۴۵، ۷۱، ...

(ح) ۱، ۲، ۶، ۲۴، ۱۲۰، ۷۲۰، ...

۲. الگوی زیر (نقاط مستطیلی) را ادامه دهید. در شکل سی و چهارم چند نقطه وجود دارد؟



۳. در درس، با اعداد مثلثی و اعداد مربعی کار کردید. مسئله‌ی قبل درباره‌ی اعداد مستطیلی بود. این مسئله در مورد اعداد پنج‌ضلعی است. الگوی آن را بیابید و تعیین کنید که در شکل هفدهم، چند نقطه وجود خواهد داشت.



۴. قاعده‌ی هریک از رابطه‌های زیر را تعیین کنید. سپس ستون خروجی‌ها را برای ورودی‌های

نشان داده شده پر کنید.

خروجی ورودی		خروجی ورودی		خروجی ورودی	
R	?	S	?	T	?
۰	-۶	۰	-۱	۰	۱
۱	-۵	۱	۴	۱	۲
۲	-۴	۲	۹	۲	۵
۳	-۳	۳	۱۴	۳	۱۰
۴	-۲	۴	۱۹	۴	۱۷
۵	?	۵	?	۵	?
۷۱۲	?	۶۳	?	۸۹۵	?

۵. جدول زیر یک صفحه‌ی گسترده است. اعداد هریک از ستون‌ها با انجام دادن اعمالی روی

اعداد ستون‌های x و y به دست می‌آیند. برای مثال، ستون C از حاصل ضرب اعداد ستون x در ۳ نتیجه می‌شود. پس، در سطر یک که $x=1$ ، $x=1$ در ۳ ضرب شده و جواب آن یعنی ۳ در ستون C آمده است. به‌طور مشابه در سطر چهار، $x=5$. حاصل ضرب ۵ در ۳، عدد ۱۵ می‌شود که در ستون C آمده است.

	x	y	A	B	C	D	E	F	G
	?	?	?	?	$3x$	?	?	?	?
۱.	۱	۳	۴	۲	۳	۵	-۱	۷	-۶
۲.	۲	۱	۳	-۱	۶	۵	۳	۶	-۲
۳.	۳	۵	۸	۲	۹	۱۱	۱	۱۱	-۱۰
۴.	۵	-۱	۴	-۶	۱۵	۹	۱۱	۷	۲
۵.	-۲	۰	-۲	۲	-۶	-۴	-۴	۱	۰
۶.	۰	۴	۴	۴	۰	۴	-۴	۷	-۸
۷.	۴	۵	۹	۱	۱۲	۱۳	۳	۱۲	-۱۰

قاعده‌ی بعضی از ستون‌ها فقط شامل یکی از اعداد x یا y است. قاعده‌ی سایر ستون‌ها

براساس اعداد هر دو ستون x و y است.

قاعده‌هایی را که اعداد ستون‌های A, B, C, D, E, F و G را تولید می‌کنند، تعیین کنید.

۶. اگر ۲ را به توان ۵۷ برسانید، رقم یکان آن چه خواهد بود؟

۷. معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

هر جواب این معادله به‌صورت سه‌تایی (x, y, z) است. جواب‌های صحیح این معادله را

بیابید. برای به‌دست آوردن همه‌ی جواب‌های این معادله روشی نظام‌دار پیدا کنید. آیا برای نمایش دادن

رابطه‌ی بین جواب‌ها می‌توان نموداری ارائه کرد؟



۸. مثلث زیر، مثلث خیام - پاسکال خوانده می‌شود. الگویی را که سطر بعدی را تولید می‌کند، بیابید؛ سپس، این مثلث را در دفتر خود بنویسید و چهار سطر بعدی آن را پر کنید.



عمر خیام

حکیم ابوالفتح عمر خیام (۵۱۷ - ۵۴۲۹ هـ ق) از برجسته‌ترین حکما و ریاضیدانان جهان اسلامی به‌شمار می‌رود. وی در شهر نیشابور زاده و زیست در همان جا نیز از دنیا رخت بر بست به خاک سپرده شد. خیام با آن که کثر چیزی نوشت و شاکرد می‌پذیرفت به‌عنوان استاد علوم مورد احترام معاصران خود بود. هم‌او بود که به واسطه‌ی تخریب و انشای وسیعی که در ریاضیات و نجوم داشت از سوی ملکشاه سلجوقی فراخوانده شد تا تقویم را اصلاح کند. حاصل کار او در این زمینه تقویم جلالی است که هنوز اعتبار و رواج دارد و از تقویم گریگوریایی دقیق‌تر است. در حدود دو و ازده اثر از خیام در علم و فلسفه بر جای مانده است و مهم‌ترین آن با کتاب جبر است که بهترین اثر در نوع خود در ریاضیات به‌شمار می‌رود. خیام اگرچه به واسطه‌ی رباعیات مشهور به وی در شرق و غرب مشهور است، ولی در جهان اسلام بیشترین تأثیر او در قلمرو ریاضیات بوده است.

در زمان مادکتر غلامحسین مصاحب، ریاضیدان ایرانی، با تألیف کتاب «حکیم عمر خیام به‌عنوان عالم جبر» برای نخستین بار مقام علمی خیام را در ریاضیات، به‌طور متقن به فارسی زبانان شناساند.

۹. الگوهای دیگری را در مثلث خیام - پاسکال جست‌وجو کنید. سه تا از این الگوها را

بنویسید.

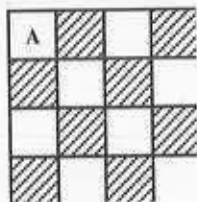
۱۰. الگویی که سطر بعدی مثلث خیام - پاسکال را تولید کند، بیابید؛ سپس، این مثلث را در

دفتر خود بنویسید و چهار سطر بعدی آن را پر کنید.

در اعداد ردیف A چه الگویی مشاهده می‌کنید؟

الگوهای دیگری را در مثلث خیام - پاسکال جست‌وجو کنید و سه تا از آن‌ها را بنویسید.

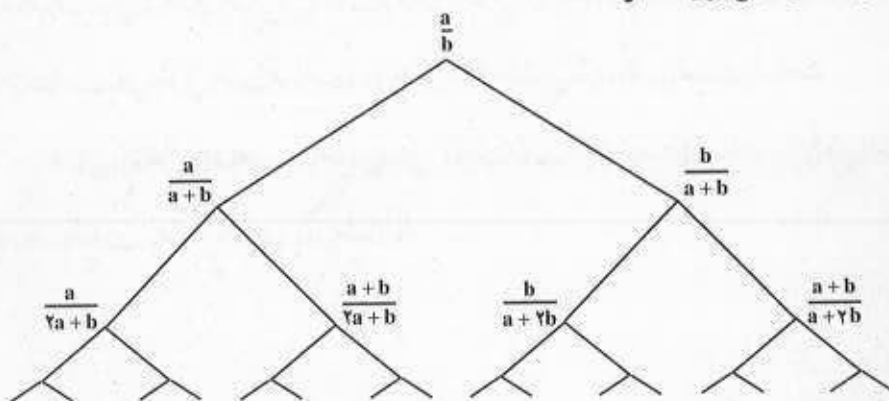
۱۱. الف) در صفحه‌ی شطرنجی که از بالا و چپ محدود شده است، یک رخ در گوشه‌ی بالا و چپ قرار دارد که می‌تواند به‌طور عمودی و افقی حرکت کند.



در هر مربع، تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی که رخ را به آن مربع می‌برند، بنویسید و برای آن الگویی بیابید.

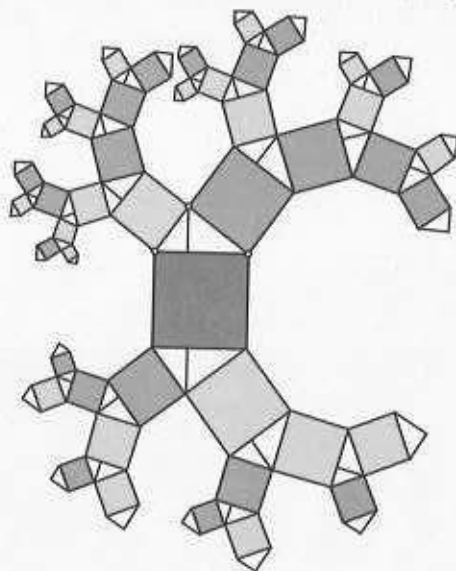
ب) اگر به جای یک رخ یک وزیر بگذاریم که تنها بتواند در سه جهت از چپ به راست ($\rightarrow$) و عمودی از بالا به پایین ($\downarrow$) و قطری به سمت پایین و راست ($\searrow$) حرکت کند و در هر مربع، تعداد مسیرهایی که وزیر را به آن نقطه می‌رسانند قرار دهیم، جدول جدید از چه الگویی تبعیت می‌کند؟

۱۲. فرض کنید $\frac{a}{b}$ یک کسر ساده شده باشد. در شکل زیر، کسر $\frac{a}{b}$ دو تالی $\frac{a}{a+b}$ ، $\frac{b}{a+b}$ را داراست و همین‌طور تا آخر ...

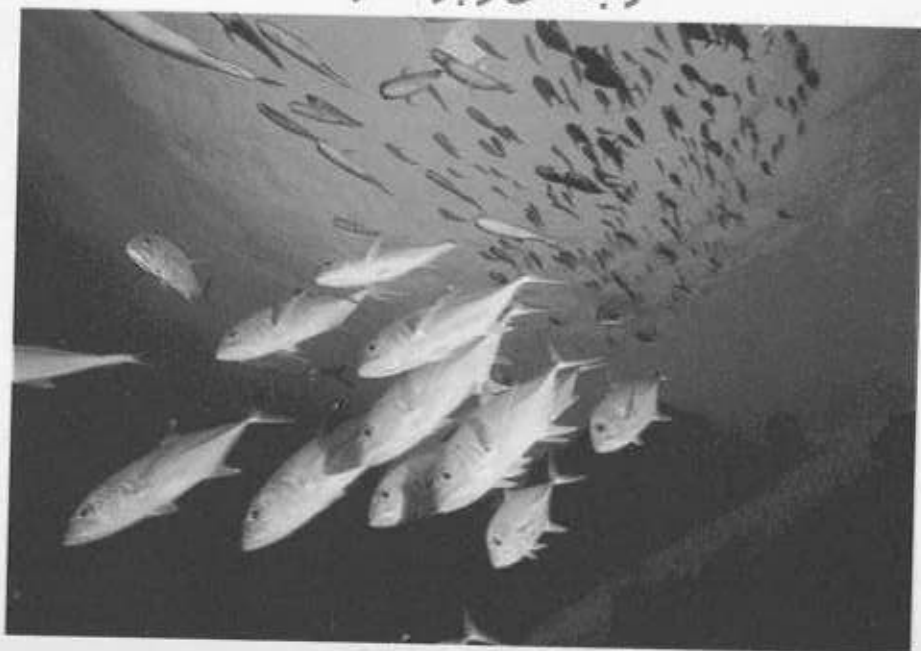


۱۳. حالا وقت آن است که آن‌چه را تاکنون در این درس خوانده‌اید، بازنگری کنید. آیا برای حل مسئله روش‌های جدیدی آموخته‌اید یا در استفاده از راهبردهایی که با آن‌ها آشنا شده‌اید، مهارتی به دست آورده‌اید؟ آیا از کار کردن با دانش‌آموزان دیگر لذت می‌برید؟ تاکنون در این درس از چه چیزی بیش‌تر خوششان آمده است؟ چه چیزی را کم‌تر دوست داشته‌اید؟ آیا از این راهبردها در خارج از درس نیز استفاده می‌کنید؟

۱۴. یک الگوریتم ترسیم ارائه کنید که شکل زیر را تولید کند. این شکل را براساس الگوریتم خودتان پنج مرحله‌ی دیگر تکرار کنید. اگر این روند تا بی‌نهایت ادامه یابد، در مورد محیط و مساحت طرح ایجاد شده چه می‌توان گفت؟



آیا فکر می‌کنید بین الگوی رشد جمعیت ماهی‌ها و ریاضیات رابطه‌ای وجود دارد؟



لاله‌های شگفت‌انگیز

شاهدان روبه‌بالا به سوی یار نظر می‌کنند. شما چرا به زمین می‌نگرید؟

شاید به شهیدان خدایی در خاک آرمیده تعظیم می‌کنید.

کجایید ای شهیدان خدایی



۱-۵- حدس و آزمایش

حدس زدن برای بیش تر مردم چیز جدیدی نیست. هر دانش آموزی بارها در طول تحصیل آگاهانه یا ناخودآگاه در مورد جواب سؤال ها و مسائل حدس هایی زده است. روش حدس زدن، در زندگی روزمره از دوران کودکی تا بزرگسالی مورد استفاده قرار می گیرد. دانشمندان هم از این روش استفاده می کنند؛ بنابراین، حدس و آزمایش نه تنها یک راهبرد، بلکه یک نگرش و طرز فکر نیز هست.

ممکن است پس از آموختن راهبرد حدس و آزمایش، احساس کنید که این کار نوعی تقلب است اما در واقع چنین نیست و واقعاً این روش برای حل مسئله مؤثر است. حدس و آزمایش در فهمیدن مسئله به ما بسیار کمک می کند و به طور شگفت انگیزی نقطه ی شروع حل مسئله را به ما نشان می دهد. این راهبرد گاهی خیلی سریع به جواب می رسد و گاهی ممکن است امیدوارکننده نباشد. نباید دل سرد شویم بلکه باید با سازمان دهی بهتر و نظام دار همراه با سماجت، برای حل مسئله تلاش کنیم. وقتی حدس می زنیم و آزمایش می کنیم، باید اعتقاد داشته باشیم که می توانیم مسئله را حل کنیم؛ حتی اگر در آغاز نتوانسته باشیم آن را خوب درک کنیم. باید حدس هایمان را هوشمندانه و با روشی نظام دار مورد ارزیابی قرار دهیم و تلاش کنیم حدس های بهتری بسازیم. پس از حدس زدن، نوبت به آزمایش کردن حدس می رسد که نیازمند اجرای عملیات ریاضی و محاسباتی است.

بنابراین، آزمایش کردن گاهی زحمت و دردسر هم دارد ولی نتیجه ی کار هرچه باشد، گاهی به جلو است. گاهی ماهیت مسئله چنان است که با حدس و آزمایش نمی توان جواب را به راحتی به دست آورد ولی می توان تقریب و تخمین خوبی برای جواب به دست داد.

جمعه بازار

دست فروشی اجناس خود را در یک جمعه بازار به حراج گذاشته بود. او هر قلم جنس را به قیمت هزار تومان می فروخت و سعی می کرد به هر مشتری فقط یک قلم جنس بفروشد! البته اگر مشتری ها خوب چانه می زدند، می توانستند جنس مورد نیاز خود را به نصف قیمت هم از او بخرند. دست فروش در پایان روز متوجه شد که همه ی دوازده قلم جنس خود را فروخته و ۹۵۰ تومان به دست آورده است. در صورتی که او از هر خریدار فقط یک اسکناس هزار تومانی یا پانصد تومانی دریافت کرده باشد، چند اسکناس هزار تومانی و چند اسکناس پانصد تومانی دارد؟

قبل از مطالعه ی راه حل مسئله، روی مسئله کار کنید. جواب درست مسئله هفت اسکناس هزار تومانی و پنج اسکناس پانصد تومانی است. حواستان را جمع کنید و با دقت به چگونگی به کارگیری

راهبرد حدس و آزمایش توجه کنید. همان گونه که خواهید دید، در این جا به طور تصادفی و بی حساب حدس نمی زنیم بلکه رویه ای نظام دار و بسیار منظم را به کار می بریم.

فرشته این مسئله را به کمک حدس و آزمایش به شکلی بسیار ساده و زیبا حل کرده است. در این جا مسیر فکری او را، مورد بحث و بررسی قرار می دهیم. فرشته راه حل خود را این گونه شرح می دهد: ابتدا یک حدس زدم. من معمولاً، حدس را با پنج شروع می کنم؛ زیرا دست راستم پنج انگشت دارد! حتی اگر در انتهای یک جزیره ی دور افتاده هم باشیم، برای کاربرد روش حدس و آزمایش، می توانم همیشه از دستم— برای آن چه باید اول حدس بزنم— استفاده کنم؛ مگر این که تمساح یکی از انگشت هایم را گاز گرفته و خورده باشد!

پنج تا چی؟ پنج تا هزار تومانی یا پنج تا پانصد تومانی؟ واقعاً فرقی نمی کند. البته من پنج تا هزار تومانی را به عنوان حدس در نظر گرفتم. بعد، برای نوشتن حدس ها جدولی تنظیم کردم. این خیلی مهم است. فقط حدس زدن کافی نیست، بلکه اول باید حدس زد، بعد آزمایش کرد و حدس های بهتری زد؛ بنابراین، می دانستم که باید یک جدول نظام دار تنظیم کنم.

هزار تومانی ها
۵

این جدول برای حدس اول بد نیست، اما باید گسترش یابد. دست فروش ۱۲ قلم جنس فروخته است. پس تعداد اسکناس ها باید ۱۲ تا باشد؛ بنابراین، بقیه ی اسکناس ها پانصد تومانی است و تعداد آن ها ۷ تا می شود. جدول را ادامه دادم.

پانصد تومانی ها	هزار تومانی ها
۷	۵

بسیار خوب؛ جدول کمی بهتر شد اما باید برای حل این مسئله بزرگ تر و گسترده تر شود. من نیاز داشتم بدانم چگونه این اسکناس ها ۹۵۰۰ تومان می شود. متوجه شدم و جدول را گسترش دادم.

مجموع پانصد تومانی ها	مجموع هزار تومانی ها	پانصد تومانی ها	هزار تومانی ها
۳۵۰۰	۵۰۰۰	۷	۵

اکنون جدول نقطه ی شروع خوبی برای کار ماست. اگرچه این فرآیند آهسته و کُند پیش می رود و ممکن است مأیوس کننده باشد ولی همواره در شروع کار نمی دانیم که در چه محدوده ای

باید دنبال جواب باشیم. در ابتدای کار، حتی نمی‌دانیم که چه اطلاعاتی را باید جمع‌آوری کنیم تا مسیر خوبی برای حل مسئله پیش‌رو داشته باشیم.

من هم این جدول را ادامه دادم و از چهارچوب تعیین شده‌ای استفاده کردم. نکته‌ی مهم این است که اگر جدول نشان دهد که کار رو به پیشرفت است، باید آن را ادامه داد و اگر نشان بدهد که رو به شکست است، باید آن را رها ساخت و دوباره شروع کرد.

چون نیاز به دانستن کل پول داشتم، جدولم را به صورت زیر بهبود بخشیدم:

کل پول	مجموع پانصد تومانی‌ها	مجموع هزار تومانی‌ها	پانصد تومانی‌ها	هزار تومانی‌ها
۸۵۰۰	۳۵۰۰	۵۰۰۰	۷	۵

باید کار بزرگی روی جدول انجام می‌دادم و کل پول را با ۹۵۰۰ تومان مقایسه می‌کردم تا بفهمم که برابر است یا نه. اگر برابر می‌شد، جواب را به دست آورده بودم و حدسم درست بود. به همین دلیل، ستون «مقایسه» را به جدول اضافه کردم و مقایسه را انجام دادم و دیدم که کل پول از ۹۵۰۰ تومان کم‌تر شد؛ بنابراین، در ستون مقایسه کلمه‌ی «کم‌تر» را نوشتم.

مقایسه	کل پول	مجموع پانصد تومانی‌ها	مجموع هزار تومانی‌ها	پانصد تومانی‌ها	هزار تومانی‌ها
کم‌تر	۸۵۰۰	۳۵۰۰	۵۰۰۰	۷	۵

به این ترتیب، آشکار شد که جدول کامل است. حدس اول را ارزیابی کردم. معلوم شد که نادرست است و مقدار پول از ۹۵۰۰ تومان کم‌تر شد؛ بنابراین، فهمیدم که حدس بعدی باید طوری باشد که کل پول بیش‌تر شود. عدد ۸ را انتخاب کردم که از ۵ بزرگ‌تر بود و در نتیجه، تعداد اسکناس‌های هزار تومانی بیش‌تر می‌شد. همه‌ی ستون‌های جدول را مطابق روند قبلی، کامل کردم.

مقایسه	کل پول	مجموع پانصد تومانی‌ها	مجموع هزار تومانی‌ها	پانصد تومانی‌ها	هزار تومانی‌ها
کم‌تر	۸۵۰۰	۳۵۰۰	۵۰۰۰	۷	۵
بیش‌تر	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰۰	۴	۸

حدس دوم هم نادرست از آب درآمد اما من ناامید نشدم، بلکه احساس کردم به خوبی راهنمایی شده‌ام؛ زیرا فهمیدم جواب باید بین این دو حدس باشد. هم‌چنین دریافتم که حدس دوم خیلی نزدیک

به ۹۵۰۰ است و فقط پانصد تومان اختلاف دارد؛ در صورتی که حدس اول هزار تومان اختلاف داشت. به همین دلیل، از حدس دوم یک واحد کم کردم و حدس سوم را ساختم و در جدول نوشتم.

مقایسه	کل بول	مجموع پانصد تومانی ها	مجموع هزار تومانی ها	پانصد تومانی ها	هزار تومانی ها
کم تر	۸۵۰۰	۳۵۰۰	۵۰۰۰	۷	۵
بیش تر	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰۰	۴	۸
برابر	۹۵۰۰	۲۵۰۰	۷۰۰۰	۵	۷

همه چیز درست شد. نتیجه گرفتیم که دست فروش ۵ تا اسکناس پانصد تومانی و ۷ تا اسکناس هزار تومانی داشته است.

در مسیر فکری فرشته برای حل این مسئله، چند نکته ی مهم وجود دارد. شناخت این نکات در به کارگیری راهبرد حدس و آزمایش مؤثر است. نکات یاد شده عبارت اند از:

- ۱- حدسی بسازید و شروع کنید.
- ۲- حدس خود را به آزمایش بگذارید و به دنبال نتیجه گیری معقولی از آن باشید.
- ۳- حدس خود را ارزیابی کنید.
- ۴- براساس ارزیابی نتیجه ی آزمایش حدس، بار دیگر حدسی بهتر بسازید.
- ۵- وقتی روی حدس خود کار کردید و جواب معلوم شد، سؤال مسئله را دوباره بخوانید و مطمئن شوید که به آن کاملاً جواب داده اید. سپس جواب را در یک جمله بنویسید.

مسئله ی ۱: مرغ ها و گاو ها. یارمحمد کشاورز در مزرعه اش مرغ و گاو هم پرورش می دهد. او تعداد مرغ ها و گاوهایش را به خاطر ندارد اما برایش مهم است که بدانند روی هم چند تا هستند و چند پا دارند! (شاید با آشنایی قرارداد دارد!) یارمحمد به خاطر دارد که مرغ ها و گاوهایش روی هم ۵۴ سر و ۱۲۲ پا دارند! او چند مرغ و چند گاو دارد؟

این مسئله را با راهبرد حدس و آزمایش حل کنید و راه حل ها را در کلاس به بحث بگذارید.

پیرامون زمین بازی

محیط یک زمین بازی مستطیل شکل ۳۷۰ متر است. طول زمین از دو برابر عرض آن، ۴۰ متر کم تر است. مساحت این زمین بازی را تعیین کنید.

ایست! قبل از این که مطالعه ی راه حل را شروع کنید، بکوشید مسئله را به کمک راهبرد حدس و آزمایش حل کنید.



راه حل نازنین: من برای نشان دادن زمین بازی، اول یک مستطیل رسم کردم. تصمیم گرفتم حدسی از طول و عرض بسازم و روی شکل بنویسم. در واقع، به نظرم رسید که حدس زدن عرض زمین ساده تر است؛ بنابراین، باید آن را دو برابر می کردم و ۴۰ واحد از آن کم می کردم. حدس ها را روی شکل نوشتم.

$$2 \times 100 - 40 = 160$$



این مسئله به طور ذاتی به دو مسئله تقسیم شد: اول، پیدا کردن طول و عرض زمین و دوم محاسبه ی مساحت آن به کمک طول و عرض (شکستن یک مسئله به چندین زیر مسئله موضوع بخش بعدی است). تصمیم گرفتم اول مسئله ی طول و عرض را حل کنم و بعد به مساحت بپردازم. شکل کمک زیادی به من کرد؛ چون از روی آن فهمیدم که محیط، دو برابر طول به اضافه ی دو برابر عرض است. اگر چه فرمول محاسبه ی محیط مستطیل را می دانستم ولی واقعاً از روی شکل مطمئن شدم!

مقایسه	محیط (۳۷۰)	دو برابر طول	دو برابر عرض	طول (۴۰ - ۲ × عرض)	عرض
بیش تر	۵۲۰	۳۲۰	۲۰۰	۱۶۰	۱۰۰
کم تر	۲۲۰	۱۲۰	۱۰۰	۶۰	۵۰
کم تر	۲۸۰	۱۶۰	۱۲۰	۸۰	۶۰
بیش تر	۴۶۰	۲۸۰	۱۸۰	۱۴۰	۹۰
کم تر	۳۴۰	۲۰۰	۱۴۰	۱۰۰	۷۰
بیش تر	۴۰۰	۲۴۰	۱۶۰	۱۲۰	۸۰
درست	۳۷۰	۲۲۰	۱۵۰	۱۱۰	۷۵

این جدول مرتب خیلی ساده به دست نیامد. خیلی وقت صرف کردم تا به جواب درست رسیدم. شکل من خیلی شلوغ شده بود، همه ی آن ها را پاک کردم. شکل های زیادی رسم کردم تا توانستم حدس هایی بهتر و نزدیک تر به جواب بسازم. همه ی آن ها را پاک کرده ام. در پایان، پس از همه ی حدس ها و آزمایش ها وقتی به جواب رسیدم، تصور کردم مسئله حل شده است! اما وقتی دوباره دقت کردم، متوجه شدم که جواب مسئله هنوز معلوم نیست. در حقیقت،

تا این جا مسئله ی طول و عرض را حل کرده بودم اما مسئله ی مساحت هنوز حل نشده بود. جوابی را که برای طول و عرض به دست آورده بودم، در هم ضرب کردم.

متر مربع $8250 = 110 \times 75$ متر

مساحت زمین بازی 8250 متر مربع شد که پاسخ سؤال مسئله است.

جدول حدس و آزمایش نازنین را بررسی کنید و چگونگی مسیر فکری او را حدس بزنید.

مسئله ی ۲: کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

در روزگاران قدیم که مردم پیشتر به کشاورزی و گله داری می پرداختند، زمین کشاورزی و مرتع اهمیت زیادی داشت. در آن زمان، برای تقسیم مرتع ها از روش های گوناگونی استفاده می شد. یکی از روش ها این بود که هر گله دار با استفاده از مقدار معینی ریسمان که در اختیار داشت، سهم خود را از مرتع مشخص می کرد. فرض کنید هر فرد مقدار 400 متر ریسمان در اختیار دارد و باید با آن زمینی مستطیل شکل را محصور کند. طول و عرض زمین باید چه قدر باشد تا بیشترین مساحت محصور شود؟ راهبرد حدس و آزمایش و رسم شکل را به کار بگیرید و جدول مناسبی تنظیم کنید. پس از حل مسئله، راه حل ها را به بحث بگذارید.

نقاشی کردن منصور و سعید

منصور یک کلاس را در 4 ساعت نقاشی می کند. سعید همان کلاس را در مدت 3 ساعت نقاشی می کند. اگر منصور و سعید هر دو با هم شروع به نقاشی یک کلاس کنند، بعد از چه مدت زمانی، نقاشی کلاس به پایان می رسد؟

مثل همیشه پیش از مطالعه ی راه حل مسئله، آن را حل کنید.

لادن روند فکری و عملکرد خود را در مورد این مسئله، این گونه شرح داد:

دانستن این که منصور و سعید هر یک چه بخشی از کلاس را در یک ساعت نقاشی می کنند، کلید اصلی حل این مسئله است. منصور یک چهارم کلاس را در یک ساعت نقاشی می کند، در صورتی که سعید در یک ساعت، یک سوم کلاس را نقاشی می کند. من برای حل این مسئله از ماشین حساب استفاده کردم و فرض کردم که سعید در یک ساعت $\frac{33}{100}$ کلاس را نقاشی می کند و منصور $\frac{25}{100}$ کلاس را. می دانستم که $\frac{33}{100}$ دقیقاً برابر $\frac{1}{3}$ نیست ولی به نظرم تقریب بسیار خوبی بود. هم چنین چون از ماشین حساب استفاده کرده بودم، می توانستم دقت بیشتری را در نظر بگیرم. با دانستن نرخ پیشرفت کار (کار انجام شده در یک ساعت) می توانستم دو ساعت کار، سه ساعت کار و... را محاسبه کنم؛ برای مثال، با استفاده از نرخ کار منصور، می توان گفت که او در 5 ساعت



۱/۲۵ کلاس (یک کلاس و بیست و پنج صدم کلاس دیگر) را نقاشی می‌کند. $۵ \times ۰/۲۵ = ۱/۲۵$
برای آزمایش حدس‌ها، کل کلاس را یک واحد در نظر گرفتیم و جدولی به صورت زیر تنظیم کردم:

مقایسه	مقداری که هر دو نفر نقاشی می‌کنند	مقداری که سعید نقاشی می‌کند	مقداری که منصور نقاشی می‌کند	حدس (ساعت‌ها)
بیش‌تر	۲/۹۰	۱/۶۵	۱/۲۵	۵
بیش‌تر	۱/۱۶	۰/۶۶	۰/۵	۲
کم‌تر	۰/۵۸	۰/۳۳	۰/۲۵	۱
کم‌تر	۰/۸۷	۰/۴۹۵	۰/۳۷۵	۱/۵
بیش‌تر	۱/۰۴۴	۰/۵۹۴	۰/۴۵	۱/۸
کم‌تر	۰/۹۸۶	۰/۵۶۱	۰/۴۲۵	۱/۷
بیش‌تر	۱/۰۱۵	۰/۵۷۷۵	۰/۴۳۷۵	۱/۷۵

چون دقت جواب را با تقریب کم‌تر از یک دهم در نظر گرفته بودم، از دو حدس آخر معلوم شد که جواب دقیق بین آن‌هاست؛ زیرا با حدس ۱/۷ ساعت، کم‌تر از کل کلاس نقاشی می‌شود و با حدس ۱/۷۵ ساعت، بیش‌تر از یک کلاس را می‌توان نقاشی کرد و هر عددی بین ۱/۷ و ۱/۷۵ با تقریب کم‌تر از یک دهم برابر ۱/۷ می‌شود (چرا؟)؛ بنابراین، با تقریب مورد نظر به جواب رسیدم؛ پس تقریباً ۱/۷ ساعت طول می‌کشد تا منصور و سعید با هم کلاس را نقاشی کنند.
ملاحظه می‌کنید که جواب لادن جوابی تقریبی است و اگر جواب دقیق مورد نظر باشد، مسئله هنوز حل نشده است.

سارا مسئله را با رویه‌ای متفاوت بررسی کرد. او از ماشین حساب هم استفاده نکرد و به جای

اعداد اعشاری، کسرهای را به کار گرفت؛ زیرا با کسرها خیلی راحت بود. سارا روش خود را برای حل این مسئله این گونه بیان کرد:

من برای کار روی این مسئله کسرها را به کار گرفتم و دیدم که اگر منصور و سعید یک ساعت کار کنند، منصور $\frac{1}{4}$ کلاس و سعید $\frac{1}{3}$ کلاس را نقاشی می کنند، بعد از چند حدس و کمی فکر کردن، فهمیدم که باید $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{3}$ را جمع کنم تا مشخص شود که آن ها با هم در یک ساعت چه مساحتی را نقاشی می کنند؛ بنابراین، جمع را انجام دادم:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$$

نتیجه گرفتم که آن ها در یک ساعت $\frac{7}{12}$ کلاس را نقاشی می کنند؛ کمی بیش تر از نصف کلاس. از این جا فهمیدم که آن ها در دو ساعت $\frac{14}{12}$ کلاس را نقاشی می کنند؛ یعنی، بیش تر از یک کلاس؛ بنابراین، نقاشی کلاس، کم تر از ۲ ساعت طول می کشد. به طور ناگهانی احساس کردم که اگر $\frac{7}{12}$ کلاس (که آن را در یک ساعت نقاشی می کنند) بخواهد به کل کلاس تبدیل شود، باید در $\frac{12}{7}$ ضرب

کل کار انجام شده	کار انجام شده به وسیله سعید	کار انجام شده به وسیله منصور	کار سعید در یک ساعت	کار منصور در یک ساعت	ساعت ها
$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	۱
$\frac{14}{12} = 1\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	۲

شود! بعد از این فکر آسمانی (!) خیالم راحت شد که احتیاجی نیست بقیه عمرم را برای به دست آوردن جواب، به جمع کردن کسرها بپردازم! جدول را با $\frac{12}{7}$ به عنوان حدس جدید ادامه دادم. نتیجه، باور کردنی نبود.

فکر می کنم اگر آن فکر ناگهانی به ذهنم نمی رسید، نمی توانستم چنین حدسی بزنم اما این حدس

کل کار انجام شده	کار انجام شده به وسیله سعید	کار انجام شده به وسیله منصور	کار سعید در یک ساعت	کار منصور در یک ساعت	ساعت ها
$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	۱
$\frac{14}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	۲
$\frac{3}{7} + \frac{4}{7} = \frac{7}{7} = 1$	$\frac{12}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{7}$	$\frac{12}{7} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{12}{7}$

عالی کار را تمام کرد. جواب $\frac{12}{7}$ ساعت یا $1\frac{5}{7}$ ساعت است؛ زمانی که باید هر دو نفر کار کنند تا نقاشی کلاس تمام شود.

این مسئله از نوع مسئله‌هایی است که در کتاب‌های ریاضی و جبر مرسوم بوده است. شاید بیش‌تر کسانی که با این نوع مسئله‌ها روبه‌رو می‌شدند، به‌خاطر دارند که نوشتن یک معادله‌ی جبری برای این مسئله مثل عبور از یک گذرگاه سخت بود. راهبرد حدس و آزمایش ابزار مفیدی برای توسعه‌ی معادلات جبری در این گونه موقعیت‌هاست. موقعیت‌هایی که نوشتن یک معادله‌ی جبری بسیار مطلوب است.

مثلث‌ها و بیش‌ترین مساحت

فرض کنید a و b و c اندازه‌های سه ضلع مثلث هستند و $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث است. مساحت یک مثلث را می‌توان با معلوم بودن سه ضلع بر اساس رابطه‌ی زیر به دست آورد.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{رابطه‌ی هرُون})$$

مسئله‌ی ۳: قطعه سیمی به طول ۱۵ متر در اختیار ماست. می‌خواهیم با این سیم یک مثلث بسازیم. تعیین کنید مثلثی که دارای بیش‌ترین مساحت است، چه ویژگی‌هایی دارد؟ آیا این مسئله تعمیم دارد؟ این مسئله را با کمک راهبرد حدس و آزمایش و استفاده از رسم شکل و تنظیم جدول نظام‌دار حل کنید. می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید و محاسبات را با تقریب خوبی انجام دهید.

بسیاری از مسائلی را که در برخورد اول پیچیده و مبهم به نظر می‌رسند و روش‌های معمولی جبر برای حل آن‌ها به راحتی قابل استفاده نیست، از راه حدس و آزمایش می‌توان حل کرد. حتی اگر نتوان آن‌ها را از این راه‌ها حل کرد، می‌توان اطلاعات مفیدی در مورد آن‌ها به دست آورد؛ بنابراین، یکی از پیامدهای راهبردهای حدس و آزمایش، شناخت مسئله و دیدن سرچشمه‌های راه حل آن است. حدس و آزمایش معجزه نمی‌کند ولی کارها را طوری سامان می‌دهد که می‌توانید از اطلاعات، بیش‌تر استفاده کنید.

این راهبرد نیز مانند هر راهبرد دیگر، هم‌چون یک ابزار است که بستگی دارد استفاده کننده چگونه از آن استفاده می‌کند. اگر از آن درست استفاده کنید، می‌توانید کارهای زیادی انجام دهید و مسائل پیچیده‌ای را حل کنید. در این زمینه، نکات زیر را همواره به یاد داشته باشید:

۱- شروع به حدس زدن کنید؛ هنگامی که روی مسئله با یک حدس کار می‌کنید، در مورد آن نکات بیش‌تری می‌آموزید.

۲- کارهای خودتان را سازمان‌دهی کنید؛ حدس و آزمایش از طریق سازمان‌دهی اطلاعات به شما کمک می‌کند. اگر نتوانید اطلاعات خود را سازمان‌دهی کنید، مغلوب می‌شوید.

۳- برای شروع دوباره آماده باشید؛ همان‌طور که در جریان حدس زدن در مورد مسئله مطالب زیادی یاد می‌گیرید، باید بدانید که اولین حدس شما مؤثر و کارآمد نبوده است.

۴- با اعداد کوچک‌تر شروع کنید تا به اعداد بزرگ‌تر برسید.



مسئله‌ها

۱. تعداد ده تومانی‌های سحر، پنج تا بیش‌تر از تعداد بیست و پنج تومانی‌های اوست. او جمعاً ۳۳۰ تومان پول دارد. سحر چه تعداد ده تومانی و چه تعداد بیست و پنج تومانی دارد؟

۲. نرگس یک جفت دستکش را با ۳۰ درصد تخفیف به قیمت ۲۴۰۱ تومان خرید. قیمت دستکش قبل از تخفیف چه قدر بوده است؟

۳. قیمت فروش یک میز تحریر با ۲۲/۵٪ سود فروشنده، ۱۵۵۴۰ تومان بود. چه مقدار از این مبلغ، هزینه‌ی تولید میز تحریر و چه مقدار آن، سود فروشنده است؟

۴. عددی دو رقمی بیابید که اگر ترتیب ارقام آن را برعکس کرده با عدد اولیه جمع کنید، حاصل جمع برابر ۱۳۲ شود.

۵. ریحانه ۲ کتاب بیش‌تر از سه برابر کتاب‌های شبنم داشت. اگر ریحانه ۱۲ جلد از کتاب‌هایش را به شبنم بدهد، آن‌گاه هر دو آن‌ها به تعداد مساوی کتاب خواهند داشت. ریحانه در ابتدا چند کتاب داشته است؟

۶. کمال می‌خواهد برای دوستش نامه‌ای بفرستد. هزینه‌ی پست این نامه ۱۲۹ تومان می‌شود. در دفتر پست فقط تمبرهای ۱۶ تومانی و ۷ تومانی موجود است. او چه تعداد از هریک از این تمبرها را باید روی پاکت بچسباند؟

۷. پری ۵۸ سکه از نوع ۵ تومانی، ۱۰ تومانی و ۲۵ تومانی دارد. تعداد پنج تومانی ها سه تا کم تر از دو برابر تعداد ده تومانی هاست. ارزش کل سکه ها ۷۴۰ تومان است. پری از هر نوع سکه چند تا دارد؟

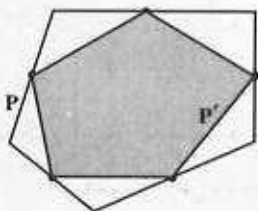
۸. سن هاشم به اضافه ی مربع سن حمید، برابر ۲۲۴۰ است. سن حمید به اضافه ی مربع سن هاشم برابر ۱۰۰۸ است. هاشم و حمید هر یک چند سال دارند؟

۹. در یک شهرستان به ازای هر ۹ نفر دانش آموز پسر، ۱۰ نفر دانش آموز دختر وجود دارد. در این شهرستان ۲۶۲۲ نفر دانش آموز مشغول به تحصیل هستند. چند نفر از آن ها دختر و چند نفر پسر هستند؟

۱۰. پوریا و سعید در دو شهرک مجاور زندگی می کنند. روزی این دو دوست تصمیم گرفتند برای دیدن رضا، یکی از دوستان قدیمی شان، به شهر دیگری بروند. صبح زود پوریا با دوچرخه و با سرعت ۱۶ کیلومتر در ساعت به خانه ی سعید رفت. سپس آن ها با اتومبیلی که با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت حرکت می کرد، به سمت منزل رضا حرکت کردند. فاصله ی منزل پوریا تا منزل رضا ۳۱۵ کیلومتر است و او برای پیمودن این مسیر ۸ ساعت در راه بود. فاصله ی منزل پوریا تا منزل سعید چه قدر است؟

۱۱. تعداد متناهی نقطه در صفحه داده شده است. آیا همواره می توان خطی در صفحه پیدا

کرد که تنها از دو نقطه ی این نقاط بگذرد؟



۱۲. نقاط وسط اضلاع یک پنج ضلعی P را به ترتیب

به هم وصل می کنیم تا پنج ضلعی جدید P' به دست آید.

فرض کنید P' داده شده است. آیا می توان P را به دست

آورد؟

۱۳. نقشه ی کوچکی از کشور ایران را روی نقشه ی بزرگ تری به دلخواه پهن می کنیم؛

چنان که کاملاً در داخل آن واقع شود. آیا این ادعا که همواره نقطه ای از ایران وجود دارد که محل آن در دو نقشه بر هم منطبق باشد، صحیح است؟ ادعای خود را اثبات کنید.

۱۴. در مورد مهارت های حدس زدن در کلاس بحث کنید. فکر می کنید شخصی که خوب

حدس می زند چه ویژگی هایی باید داشته باشد؟ به نظر شما یک حدس خوب چگونه حدسی است؟

۱۵. مزیت ها و نواقص راهبرد حدس و آزمایش را توصیف کنید. ترکیب این راهبرد با راهبرد

حذف حالت های نامطلوب آن را چه قدر قوی تر می کند؟

گل عذاری ز گلستان جهان ما را بس



۱-۶- زیر مسئله‌ها (مسئله‌های درون مسئله)

شامپانزه در اتاقکی زندگی می‌کند و گرسنه است. ناگهان در بیرون اتاقک، موزی را می‌بیند که روی زمین افتاده است. شامپانزه می‌تواند دست خود را از لای میله‌های اتاقک بیرون آورد ولی دستش به موز نمی‌رسد. حیوان با جدیت تلاش می‌کند تا به موز دست یابد. درست روبه‌روی موز پشت میله‌ها نشسته است. در بیرون اتاقک، قطعه چوبی روی زمین افتاده است که دست حیوان به آن می‌رسد. ابتدا به آن توجهی نمی‌کند. ناگهان به هیجان می‌آید؛ چوب را برمی‌دارد و آن‌قدر تلاش می‌کند تا به وسیله‌ی چوب موز را به دست می‌آورد و می‌خورد.

اگر چه این مشاهده برای آزمایش‌های روان‌شناسی هم بسیار مهم است ولی تفکری زیبا و ریاضی‌گونه مربوط به حل مسئله در آن وجود دارد. در واقع، میمون دو مسئله را حل کرده است:

الف) برداشتن موز؛

ب) برداشتن قطعه چوب.

مسئله‌ی الف پیش از پیدایش مسئله‌ی ب وجود داشت. در ابتدا میمون هیچ علاقه‌ای به چوب نشان نمی‌داد؛ زیرا گرسنه بود اما می‌دانست که چوب خوردنی نیست. با وجود این، اول مسئله‌ی ب را حل کرد. حل مسئله‌ی ب، راه را برای حل مسئله‌ی اصلی الف باز کرد. میمون مستقیماً به حل مسئله‌ی الف علاقه‌مند بود و تنها به‌طور غیر مستقیم متوجه مسئله‌ی ب شد.

«خلاصیت ریاضی - پولیا»

مسئله‌ی الف مسئله‌ی اصلی و مسئله‌ی ب یک زیر مسئله یا مسئله‌ی درون مسئله یا یک مسئله‌ی کمکی برای مسئله‌ی الف است.

همه‌ی راهبردهایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند، با سازمان‌دهی اطلاعات سروکار دارند. رسم یک شکل، اطلاعات را به صورت تصویری سازمان‌دهی می‌کند. راهبردهای تنظیم جدول نظام‌دار، حدس و آزمایش نیز به نوع دیگر، داده‌ها را تنظیم و مرتب می‌کنند. راهبرد مسئله‌های درون مسئله دارای نگاهی متفاوت است و با طرح نقشه و چگونگی یورش به مسئله سروکار دارد. مسئله‌ی زیر را به عنوان نمونه‌ای ساده در نظر بگیرید.

«اگر $3x - 1 = 17$ ، آن‌گاه مقدار $2x - 4$ را بیابید».

برای حل این مسئله، ابتدا باید معادله‌ی $3x - 1 = 17$ را حل کرد و سپس مقدار x را در عبارت $2x - 4$ قرار داد تا جواب مسئله به دست آید. در این جا، حل معادله‌ی $3x - 1 = 17$ یک زیر مسئله برای مسئله اصلی است.

تو تذکری، تو مظهر پاکی و صداقتی

آسان بر (آسانسور)

ظرفیت یک آسان بر ۲۰ نفر خردسال یا ۱۵ نفر بزرگسال است. اگر ۱۲ نفر خردسال درون آسان بر باشند، این وسیله برای چند نفر بزرگسال هم ظرفیت دارد؟ زیر مسئله‌های این مسئله را تعیین و سپس مسئله را حل کنید. مسئله‌ی یادشده را می‌توان با راهبرد رسم شکل هم حل کرد. قبل از این که به بررسی خود ادامه دهید، بکشید مسئله را با کمک هر دو راهبرد حل کنید. چندین دسته زیر مسئله برای این مسئله وجود دارد که به کمک آن‌ها می‌توان این مسئله را حل کرد. بعضی از این زیر مسئله‌ها را که به وسیله‌ی دانش آموزان یک کلاس ارائه شده‌اند، بررسی می‌کنیم. یاسمین کارش را به این صورت روی تخته نوشت:

$$\frac{15}{20} = \frac{x}{12}, \quad 20x = 180, \quad x = 9$$

و این گونه توضیح داد: من این مسئله را با کمک یک تناسب حل کردم و $x = 9$ را به دست آوردم؛ بنابراین، ۹ نفر بزرگسال می‌توانند داخل آسان بر شوند.

ریحانه مسیر متفاوتی را در پیش گرفت: من تعدادی زیر مسئله نوشتم و دریافتیم که باید از راهبرد زیر مسئله استفاده کنم؛ چون در این درس روی آن کار کرده‌ایم. زیر مسئله‌ها عبارت‌اند از:

۱- چند نفر بزرگسال برابر یک نفر خردسال است؟

۲- چند نفر کودک را هنوز می‌توان به افراد حاضر در آسان بر اضافه کرد؟

۳- آیا این تعداد با تعداد بزرگسالان معادل است؟



به نظرم رسید که این روش جواب می‌دهد؛ بنابراین، زیر مسئله‌ها را حل کردم.

۱- چند نفر بزرگسال معادل یک نفر خردسال است؟ چون ۲۰ کودک معادل ۱۵ بزرگسال

است، یک کودک معادل $\frac{15}{4}$ یا $\frac{3}{4}$ یک بزرگسال است. ظاهراً درست است؛ زیرا بچه‌ها از بزرگسالان کوچک‌تر هستند.

۲- چند کودک دیگر می‌توانند در آسان‌بر جا بگیرند؟ «کنون ۱۲ کودک در آسان‌بر حضور

دارند. چون ظرفیت آسان‌بر ۲۰ کودک است، برای ۸ کودک دیگر نیز ظرفیت خواهد داشت.»

۳- این تعداد معادل چند نفر بزرگسال است؟ از آن‌جا که یک کودک معادل $\frac{3}{4}$ یک بزرگسال

است، ۸ کودک معادل $8 \times (\frac{3}{4})$ بزرگسال یا معادل ۶ بزرگسال خواهد بود؛ بنابراین، ۶ نفر بزرگسال می‌توانند وارد آسان‌بر شوند.

جواب من با جواب یاسمین یکی نیست. فکر می‌کنم او اشتباه کرده است ولی مطمئن نیستم.

با این حال تصور می‌کنم مسئله را درست حل کرده‌ام.

لاله در مورد اشتباه یاسمین چنین توضیح می‌دهد: راه حل یاسمین اشتباه است. من هم راه او

را رفتم اما او تنها یکی از زیر مسئله‌ها را حل کرد. او به درستی مشخص کرد که ۱۲ نفر بچه معادل ۹

نفر بزرگسال است. بعد از این، او باید ۱۲ کودک را از آسان‌بر خارج و ۹ بزرگسال را جایگزین

آن‌ها می‌کرد. به این ترتیب ۶ نفر بزرگسال دیگر در آسان‌بر جا می‌گرفت. پس ریحانه و من مسئله را

درست حل کرده‌ایم ولی راه حل یاسمین اشتباه است.

مسئله ۱: جاده قرمز!

در مثلث قائم الزاویه RED، زاویه R قائمه است. نقطه O روی ضلع ER و نقطه A روی ضلع ED واقع است؛ به طوری که OA بر ED عمود است. به علاوه، $EA = 6$ ، $AD = 14$ ، $ER = 16$. مساحت چهارضلعی ROAD را به دست آورید.

راهبرد رسم شکل و زیر مسئله را به کار بگیرید. پس از حل مسئله، راه حل ها را ارائه کنید و آن ها را به بحث بگذارید.

مسئله های مخلوط کردن از جمله مسئله های ابهام برانگیز هستند. هنگامی که در به کارگیری راهبرد زیر مسئله ها مهارت پیدا می کنیم، مسائل واقعاً سریع و سراسر حل می شوند. به سختی می توان به معادله ی یک مسئله ی مخلوط کردن، دست یافت. به همین دلیل، بیش تر دانش آموزان معادله ی جور کردن مسئله را حفظ می کنند که موجب بروز انواع اشتباهات می شود. نمونه ای از این مسئله ها را بررسی می کنیم.

رنگ

مخلوطی از ۲۵٪ رنگ قرمز، ۳۰٪ رنگ زرد و ۴۵٪ آب تولید شده است. اگر ۴ پیمانه ی یک لیتری رنگ قرمز و ۲۰ پیمانه ی یک لیتری از مخلوط را روی هم بریزیم و مخلوط جدیدی تولید کنیم، چند درصد از مخلوط جدید رنگ قرمز است؟ زیر مسئله ها را تعیین و یادداشت کنید و سپس به حل مسئله بپردازید.

آیا شما در مورد این مسئله با ابهام روبه رو شدید؟

محمود و کمال با هم روی این مسئله کار کرده بودند. مسیر تفکر آن ها را در گفت و گویشان دنبال می کنیم.

محمود: من از مسئله ی مخلوط کردن متنفرم. هرگز این گونه مسئله ها را در کلاس جبر حل نمی کنم.

کمال: ولی من این طور نیستم و همه ی مخلوط شده ها را به دست می آورم، اجازه بده با زیر مسئله ها روی آن کار کنیم.

محمود: بسیار خوب، من هم بازی می کنم! چه چیزی را باید بدانیم؟

کمال: درصد رنگ قرمز را در مخلوط جدید.

محمود: پس ما باید مقدار رنگ قرمز را در مخلوط جدید و مقدار کل رنگ مخلوط جدید را تعیین کنیم. به این ترتیب، می توانیم درصد رنگ قرمز را تعیین کنیم.

کمال: درست است. بیا این زیر مسئله ها را بنویسیم.

- ۱- در مخلوط جدید چند پیمانه رنگ قرمز وجود دارد؟
- ۲- در مخلوط جدید چند پیمانه رنگ وجود دارد؟
- ۳- چند درصد از مخلوط جدید، رنگ قرمز است؟

محمود : درست است. بیا این‌ها را مجسم کنیم. در مخلوط جدید چه مقدار رنگ قرمز وجود دارد؟ چه طور می‌توانیم آن را معلوم کنیم؟ ما نمی‌توانیم حتی تعیین کنیم که در مخلوط اولیه، چه مقدار رنگ قرمز وجود داشته است.

کمال : درست می‌گویی. آن یک زیر مسئله است. می‌خواهم آن را به زیر مسئله‌ها اضافه کنم.

کمال سپس زیر مسئله‌ها را مرتب کرد.

- ۱- در مخلوط اولیه چند پیمانه رنگ قرمز وجود داشته است؟
- ۲- در مخلوط جدید چند پیمانه رنگ قرمز وجود دارد؟
- ۳- در مخلوط جدید چند پیمانه رنگ وجود دارد؟
- ۴- چند درصد از مخلوط جدید، رنگ قرمز است؟

کمال : فکر می‌کنم در وضعیت خوبی قرار داریم. 25% مخلوط اولیه رنگ قرمز است؛ چون 20 پیمانه از مخلوط اولیه وجود دارد؛ $20 \times 25\% = 5$ ؛ یعنی، در مخلوط اولیه 5 پیمانه رنگ قرمز وجود داشته است.

محمود : درست است؛ بنابراین، در مخلوط جدید، پنج به علاوه‌ی چهار - یعنی 9 - پیمانه رنگ قرمز وجود دارد.

کمال : به چیزهای هیجان‌آوری دست یافته‌ایم. زیر مسئله‌ی بعدی ما این است که در مخلوط جدید، چند پیمانه رنگ وجود دارد؟ در مخلوط جدید 24 پیمانه رنگ وجود دارد. 20 پیمانه‌ی اولیه و بعد 4 پیمانه که به آن اضافه شد.

محمود : برای تعیین درصد رنگ قرمز در مخلوط جدید، کافی است تعداد پیمانه‌های رنگ قرمز را به کل مخلوط جدید تقسیم کنیم و سپس، عدد حاصل را در 100 ضرب کنیم؛ بنابراین:

$$\frac{9}{375} = 0.024 \text{ که برابر } 2.4\% \text{ است. مثل این که این زیر مسئله‌ها خیلی هم بد نیستند!}$$

کمال : بیا برویم شهر را رنگ بزنیم!

در مورد درصد رنگ زرد در مخلوط جدید، چه می توان گفت؟

مسئله ی شیر کاکائو

یک کارخانه ی تولیدکننده ی لبنیات دو نوع شیر کاکائو در دست تولید دارد : یک نوع ۱۰ درصدی (یعنی ۹۰٪ شیر و ۱۰٪ مواد دیگر) و یک نوع ۲۵ درصدی. چون نوع ۱۰ درصدی خیلی رقیق و نوع ۲۵ درصدی غلیظ است، بازار فروش با رکود روبه رو شده است؛ بنابراین، مدیر کارخانه تصمیم به تولید شیر کاکائوی ۱۵ درصدی می گیرد. مقداری از انواع قبلی شیر کاکائو در سردخانه به صورت ذخیره وجود دارد که قرار شده است از این دو نوع، مخلوط ۱۵ درصدی تولید کنند. مقدار شیر کاکائوی ۱۰ درصدی موجود در سردخانه به مقدار زیاد و مقدار نوع ۲۵ درصدی آن ۳۰۰ گالن است. چند گالن ۱۰ درصدی را باید با ۳۰۰ گالن ۲۵ درصدی مخلوط کرد تا نوع ۱۵ درصدی به دست آید؟

مسئله ی ۲: مسئله ی شیر کاکائو را با استفاده از دو راهبرد حدس و آزمایش و زیرمسئله ها حل

کنید.

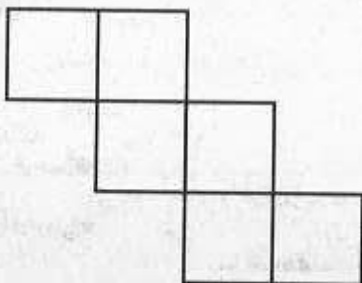


بعضی از مسئله‌ها، زیر مسئله‌های زیادی دارند. قبل از شروع کار روی این نوع مسائل، مرتب کردن فهرست زیر مسئله‌ها بسیار مفید است. زیر مسئله‌ها از نقشه‌ی اولیه‌ی حل کردن مسئله به دست می‌آیند و تنظیم آن‌ها موجب تمرکز فکری فرد حل کننده روی مسئله خواهد شد. حل کردن یک مسئله به وسیله‌ی زیر مسئله‌ها، شبیه عبور از رودخانه‌ای عریض با استفاده از سنگ‌هایی است که از آب رودخانه بیرون آمده‌اند. با جهش از روی یک سنگ به روی سنگ دیگر، به راحتی می‌توان از عرض رودخانه گذشت.

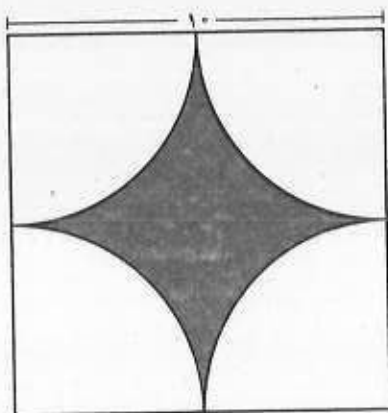


مسئله‌ها

۱. پنج نفر از دانش‌آموزان تصمیم گرفتند یک مهمانی برگزار کنند. آن‌ها توافق کردند که هزینه‌ی مهمانی را به تساوی بین خود تقسیم کنند. لادن ۱۴۰۰ تومان برای نوشیدنی پرداخت، آزاده ۳۰۰ تومان برای خرید لیوان یک بار مصرف پرداخت، وحیده برای تزیین محل مهمانی ۷۰۰ تومان کاغذ رنگی خرید، مرجان ۹۰۰ تومان برای خوراکی پرداخت و بهناز ۲۰۰ تومان برای بادکنک و ۵۸۰ تومان برای آب‌نبات پرداخت. هرکس باید چه قدر پول به دیگری بدهد؟
۲. در یک هواپیما که دو سوم آن پُر بود، ۲۰٪ مسافران پسر، یک چهارم مسافران زن، یک هشتم مسافران دختر و ۶۸ نفر از آن‌ها مرد بودند. در این هواپیما چند صندلی وجود دارد؟
۳. در شکل زیر، شش مربع مساوی دیده می‌شود. اگر مساحت شکل ۵۴ متر مربع باشد، محیط آن چه قدر است؟



۴. مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار را بیابید. شکل بزرگ یک مربع است و هر یک از کمان‌ها یک چهارم یک دایره است.



۵. خانمی هر ماه ۱٪ حقوقش را پس‌انداز می‌کند. شرکتی که این خانم در آن کار می‌کرد، به علت بحران مالی، حقوق او را از ۳۶۰۰۰ تومان به ۳۰۰۰۰ تومان در ماه کاهش داد. این خانم تصمیم گرفت علی‌رغم کاهش حقوقش، میزان پس‌انداز ماهانه‌اش را هم چنان ثابت نگه دارد. حالا او چند درصد حقوقش را پس‌انداز می‌کند؟

۶. کلاس ترم اول آقای هاشمی ۴۰ نفر دانش‌آموز داشت. در امتحان پایان ترم، میانگین پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان ۹۶٪ بود. در کلاس ترم دوم او ۲۰ دانش‌آموز شرکت داشتند. میانگین پاسخ‌های صحیح این دانش‌آموزان به پرسش‌های امتحان ترم قبل ۹۰٪ بود. میانگین پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان در هر دو ترم چند درصد بوده است؟

۷. اگر کاوه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت رانندگی کند، ۳ ساعت طول می‌کشد تا به زرین دشت برسد. اگر او با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت حرکت کند، سفرش چند دقیقه بیش‌تر طول خواهد کشید؟

۸. جعبه‌ی مکعب مستطیل شکلی را در نظر بگیرید. اگر مساحت سقف جعبه 324 cm^2 ، مساحت جلوی جعبه 135 cm^2 و مساحت دیواره‌ی پهلوئی آن 60 cm^2 باشد، حجم این جعبه چه قدر است؟

۹. حجم یک لیوان یک بار مصرف را که قطر دهانه‌ی آن ۷ سانتی‌متر، قطر ته آن ۴ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر است، تعیین کنید.

۱۰. عدد صحیح دلخواه n را در نظر بگیرید. ارقام نمایش ده‌دهی n را با هم جمع کنید تا عدد

جدیدی به دست آید. همین عمل را روی عدد جدید n_2 تکرار کنید تا عدد n_3 به دست آید و همین طور تا آخر ادامه دهید. آیا در متناهی مرحله به عددی یک رقمی می‌رسیم؟ مشخص کنید دقیقاً چه عددی پس از انجام مراحل بالا به رقم ۹ ختم می‌شوند. چه عددی به هریک از ارقام ۱ تا ۸ ختم می‌شوند؟

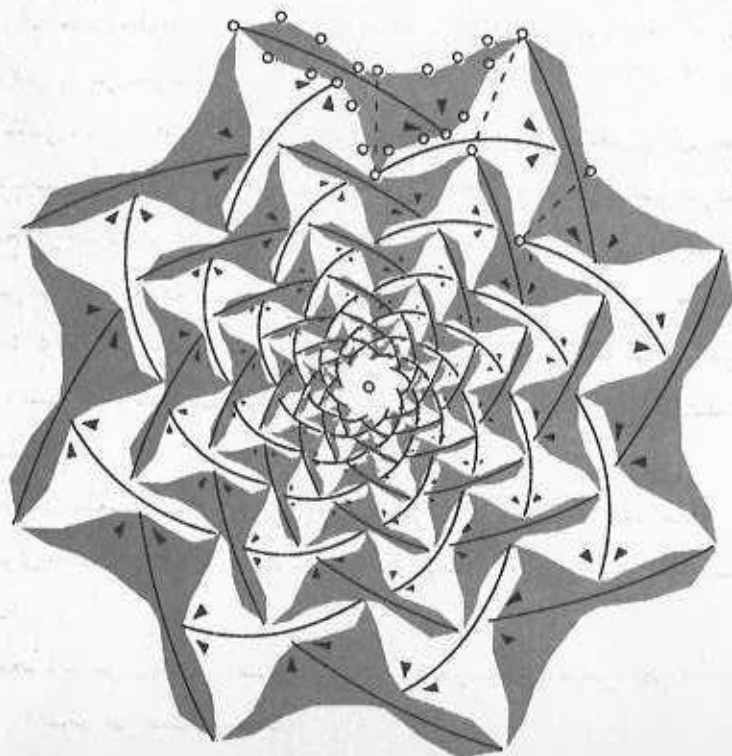
۱۱. به ترتیب، نقاط میانی اضلاع یک n ضلعی P را به هم وصل می‌کنیم تا n ضلعی جدیدی P' به دست آید. فرض کنید P' داده شده است. چگونه می‌توان P را از روی P' ساخت؟

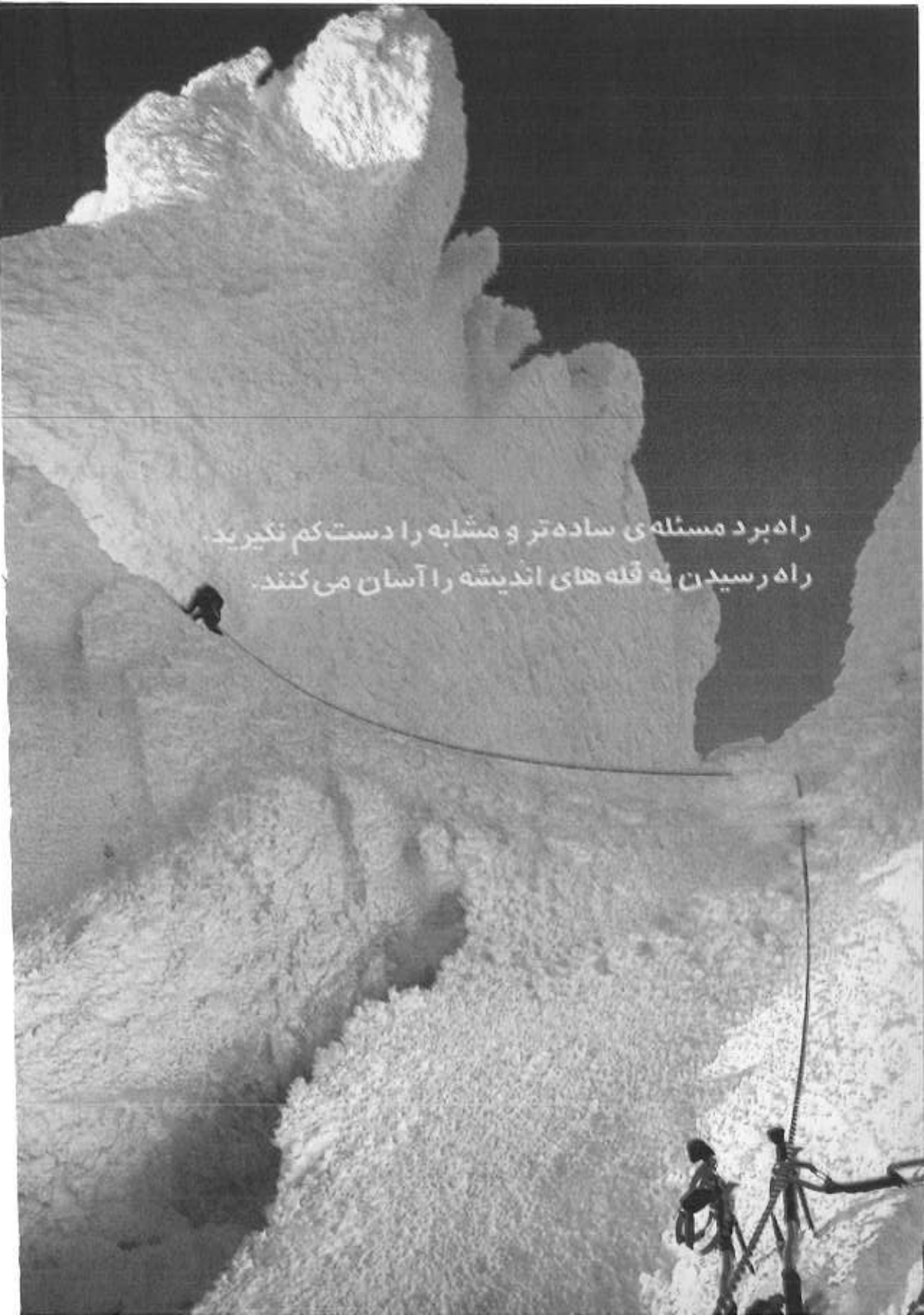
۱۲. برای کدام اعداد طبیعی $n \geq 3$ می‌توان یک n ضلعی منتظم در صفحه پیدا کرد که تمام رئوس آن دارای مختصات گویا باشند؟

۱۳. به نظر شما، آیا تقسیم یک مسئله به زیرمسئله‌ها همیشه به‌روش واحدی انجام می‌پذیرد؟ نظریات خود را در کلاس به بحث بگذارید.

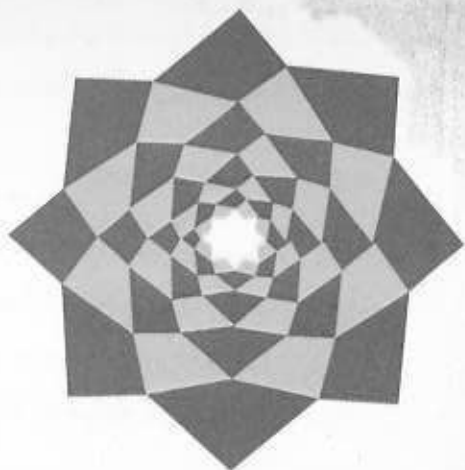
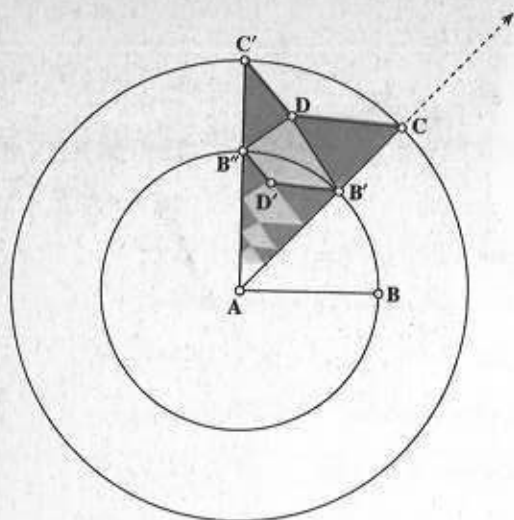
۱۴. آیا ممکن است یک زیرمسئله از خود مسئله سخت‌تر باشد؟

۱۵. آیا ممکن است مسئله را نتوان به زیرمسئله‌ها تقسیم کرد؟





راهبرد مسئله‌ی ساده‌تر و مشابه را دست‌کم نگیرید.
راه رسیدن به قله‌های اندیشه را آسان می‌کنند.



۱-۷- مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط با مسئله‌ی اصلی

چندان سر حال نبود اما به ناچار بایستی کارهایی را که روی میزش انبار شده بود، انجام می‌داد. به همین دلیل قصد داشت دانش‌آموزان را به حل مسئله‌ای مشغول کند تا فرصتی به دست آورد و کارهایش را انجام دهد! با این فکر از جا برخاست و روی تخته‌ی کلاس نوشت: «حاصل جمع اعداد طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ را به دست آورید.»

تصور می‌کرد که این کار دست کم ۳۰ دقیقه دانش‌آموزان را سر کار می‌گذارد! اما هنوز چند لحظه‌ای نگذشته بود که کارل گاوس نزد معلم رفت و پاسخ مسئله را که روی تخته‌ای چوبی نوشته بود، روی میز او گذاشت و گفت: مسئله حل شد. درحالی که بقیه‌ی شاگردان، کار خود را تازه شروع کرده بودند. معلم که از نادرست بودن پاسخ پسرک کاملاً مطمئن بود، اصلاً به نوشته‌ی او توجه نکرد و او را به گزافه‌گویی متهم نمود! مدت‌زمانی نسبتاً طولانی گذشت؛ حالا دیگر معلم هم‌ی کارهایش را انجام داده بود. بچه‌ها هم یکی یکی می‌آمدند و لوح‌های خود را به ترتیب روی لوح گاوس می‌گذاشتند. به این ترتیب، آخرین لوحی که معلم نگاه کرد، متعلق به گاوس بود. او با تعجب دید که جواب گاوس درست است! واقعاً گاوس مسئله را چگونه حل کرده بود؟ داستانی که گاوس در مورد راه حل خود گفت، چه بود؟

از یک تا صد

مجموع اولین صد عدد طبیعی چه قدر است؟

شما می‌توانید این مسئله را حل کنید. این تجربه‌ی عالی را از دست ندهید!

راه‌های گوناگونی برای حل کردن این مسئله وجود دارد. یکی از آن‌ها این است که کاغذ و قلم را برداریم و شروع به جمع کردن کنیم (پشت سر هم جمع کنیم) یا ماشین حساب را روشن کنیم و به

کمک آن، عملیات را انجام دهیم! اما گاوس ماشین حساب نداشت؛ بنابراین، او باید از راه دیگری رفته باشد. روش دیگر این است که راهبرد زیر مسئله و الگویابی را ترکیب کنیم و به حل مسئله بپردازیم.

مجید راه حل خود را به این شکل توضیح می دهد:

من مسئله را به چند زیر مسئله شکستم؛ به این ترتیب که ده تا ده تا به صورت زیر جمع کردم:

$$\text{زیر مسئله ی ۱: } 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$$

$$\text{زیر مسئله ی ۲: } 11+12+13+14+15+16+17+18+19+20=155$$

$$\text{زیر مسئله ی ۳: } 21+22+23+24+25+26+27+28+29+30=255$$

آن گاه، فوراً الگوی به نظر رسید:

$$55, 155, 255, 355, \dots$$

این اعداد را با هم جمع کردم و جواب به دست آمد.

$$55+155+255+355+\dots+855+955=5050$$

مجید اضافه می کند: «زیر مسئله ها و الگویابی کار را بسیار ساده کرد. البته، من از ماشین حساب هم استفاده کردم؛ در صورتی که دویست سال پیش ماشین حساب وجود نداشت».

واقعاً گاوس این مسئله را چگونه حل کرده است؟ شاید او داستان راه حل مسئله را به صورت زیر بیان کرده است:

موقعی که معلم این مسئله را روی تخته ی کلاس نوشت، واقعاً نمی خواستم آن را حل کنم. فکر کردم که او می خواهد ما را سرگرم کند؛ چون بچه ها خیلی شلوغ کرده بودند. آن ها موشک و هواپیمای کاغذی به طرف یک دیگر پرتاب کرده بودند و همه جای کلاس پر از آشغال و کاغذ شده بود! ولی من هیچ کاری نکرده بودم و به همین دلیل، احساس می کردم که نباید تنبیه شوم. بچه ها مشغول تمیز کردن اطراف میزهایشان شدند و من نمی خواستم با آن ها در این کار همراه شوم؛ بنابراین، برای لحظه ای به مسئله فکر کردم. اول تصور می کردم که جمع کردن اعداد از ۱ تا ۱۰۰ زمان زیادی طول خواهد کشید. در نتیجه، روی ۱ تا ۱۰ فکر کردم. می دانستم بدون هیچ مشکلی می توانم آن ها را با هم جمع کنم.

$$1+2=3, \quad 3+3=6, \quad 6+4=10, \quad 10+5=15, \dots$$

خیلی زود از این کار خسته شدم. تصور نمی کردم که بتوانم تا ۱۰۰ ادامه بدهم؛ باید راه ساده تری هم وجود داشته باشد. به نظر رسید که لازم نیست اعداد را با همان ترتیب با هم جمع کنم. می توانستم از هر ترتیبی که دلم می خواست استفاده کنم. پس، شروع به بازی با اعداد کردم. ۱ را با ۵ جمع کردم، ۶ شد. ۲ را با ۴ جمع کردم، دوباره ۶ به دست آمد. به نظر عجیب آمد. دوباره شروع

کردم و این دفعه ۱۰ را با ۱ جمع کردم، ۱۱ شد. سپس $۲+۹$ ، $۳+۸$ ، $۴+۷$ ، $۵+۶$ ، که همگی برابر ۱۱ شدند. پس جمع تمام اعداد از ۱ تا ۱۰ برابر بود با ۱۱×۵ ؛ چون ۵ گروه ۱۱ تایی بود. با این تجربه، فوراً دریافتم که چگونه باید مسئله‌ی اولیه را حل کنم.

$$۱+۱۰۰=۱۰۱ \quad ۳+۹۸=۱۰۱$$

$$۲+۹۹=۱۰۱ \quad ۴+۹۷=۱۰۱$$

همین طور ادامه دادم و ۵۰ گروه با مجموع ۱۰۱ به دست آوردم؛ بنابراین، حاصل $۵۰ \times ۱۰۱ = ۵۰۵۰$ شد. با شادمانی بسیار و درحالی که لوحم را به دست گرفته بودم، نزد معلم رفتم ولی او کاری که کارل گاوس در قرن هجدهم انجام داد، درسی بزرگ برای ما دارد. اگر احساس می‌کنید مسئله سخت است، سعی کنید آن را به مسئله‌ای ساده‌تر تبدیل کنید. برای ساختن مسئله‌ی ساده‌تر از یک مسئله‌ی سخت، راه‌های گوناگونی وجود دارد. البته مسئله‌ی ساده‌تری که به مسئله‌ی اصلی مربوط باشد و بتوان آن را حل کرد. اگر گاوس کوچک به موشک‌ها و هواپیماهای کاغذی که بچه‌ها به طرف هم پرتاب می‌کردند می‌اندیشید، مسئله‌ی ساده‌تری را برای اندیشیدن پیدا کرده بود! و حتماً مسئله خود به خود حل می‌شد.

یک راه ساده برای ساختن مسئله‌ای آسان‌تر، این است که اعداد کوچک‌تر و ساده‌تر را جایگزین اعداد بزرگ‌تر کنیم و مسئله را با اعداد کوچک‌تر حل کنیم؛ یا این که به جای حل کردن مسئله در حالت کلی، چند حالت و مثال خاص را در مورد آن بررسی کنیم و به دنبال نشانه یا الگویی برای حل مسئله‌ی اصلی بگردیم؛ بنابراین، برای به کارگیری راهبرد زیرمسئله‌ها، باید روش‌های ساختن زیرمسئله‌های ساده‌تر و مرتبط با مسئله‌ی اصلی را بدانیم. در این جا روش‌هایی را ارائه می‌کنیم که برای ساختن یک مسئله‌ی ساده‌تر و مربوط به مسئله‌ی اصلی، می‌توانند مؤثر و راه‌گشا باشند.

۱- از یک عدد ساده و مناسب به جای یک متغیر استفاده کنید.

۲- عددهای کوچک‌تر یا ساده‌تر را جایگزین عددهای خیلی بزرگ سخت کنید.

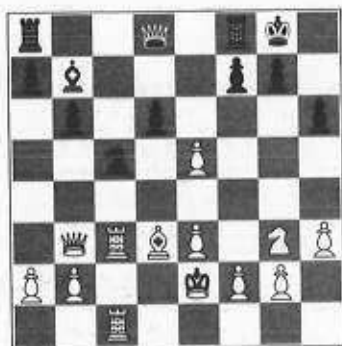
۳- مجموعه‌ای از مثال‌های ساده‌تر را انجام دهید و در میان این حالت‌های ساده، در پی یافتن یک الگو باشید.

۴- یک مثال خاص و ساده‌تر را انجام دهید و براساس آن، فرآیند ساده‌تری را کشف کنید و با استفاده از آن به حل مسئله‌ی اصلی بپردازید.

۵- اطلاعات غیرضروری را حذف کنید.

۶- بعضی از شرط‌ها را تغییر دهید، ثابت نگه‌دارید یا کنار بگذارید.

راهبرد مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط، شبیه راهبرد حدس و آزمایش است. در راهبرد حدس و آزمایش می‌کوشیم یک عدد را حدس بزنیم و ببینیم که آیا کار می‌کند یا نه؟ در راهبرد مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط، تلاش ما این است که یک فرآیند حل مسئله را در حالتی خاص یا ساده‌تر پیدا کنیم و برای حل مسئله‌ی اصلی به کار ببریم.



چند تا مربع؟ بشمار! باز هم هست!

در صفحه‌ی شطرنج چند مربع وجود دارد؟ (راهنمایی:

بیش از ۶۴ تا وجود دارد)

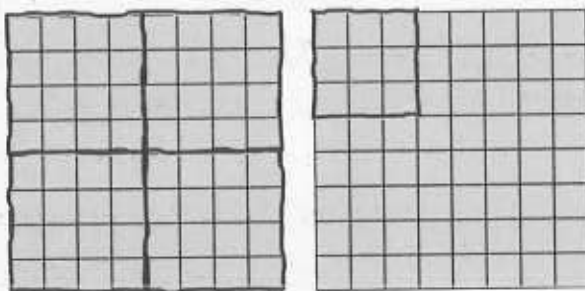
اگر می‌خواهید شنا یاد بگیرید، با شجاعت وارد آب شوید و اگر می‌خواهید روش حل مسئله‌ها را یاد بگیرید، آستین‌ها را بالا بزنید و برای حل مسئله تلاش کنید.

امیر و احسان روی این مسئله کار کرده‌اند. هر دو

آنها به بازی شطرنج علاقه دارند. به همین دلیل، با علاقه‌ای وافر به حل این مسئله پرداخته‌اند. آنها از کاغذ شطرنجی استفاده کرده‌اند تا برای رسم شکل‌های متعدد صفحه‌ی شطرنج مشکلی نداشته باشند. مسیر تفکر و بحث و بررسی آنها را دنبال می‌کنیم.

احسان: این مسئله بسیار ساده است. آن ۶۴ تاست. روی هر ضلع، ۸ مربع وجود دارد و 8×8 برابر ۶۴ می‌شود.

امیر: اما این جواب نمی‌تواند درست باشد؛ زیرا خیلی ساده است! نگاه کن؛ ببین، روی صفحه‌ی شطرنج مربع دیگری نیست؟ اگر ما صفحه را به چهار مربع تقسیم کنیم، آن‌گاه ۴ تا مربع بیش‌تر از مربع‌هایی که هر کدام ۱۶ تا مربع کوچک دارند، خواهیم داشت. اگر یک مربع 3×3 را جدا کنیم، وضع چگونه می‌شود؟



احسان: بله، شما درست می‌گویید. این مسئله سخت‌تر از آن است که من تصور می‌کردم. امیر: بسیار خوب؛ بیا با هم به یک مسئله‌ی ساده‌تر نگاه کنیم. چگونه می‌توانیم مسئله‌ای

ساده‌تر و مرتبط ایجاد کنیم؟

احسان: من می‌دانم: $5 + 3$! این یک مسئله‌ی ساده‌تر است و جواب آن ۸ می‌شود.

امیر: احسان، مسئله‌ی ساده‌تر باید به مسئله‌ای که می‌خواهیم آن را حل کنیم، مربوط باشد!

احسان: بله، فهمیدم؛ ما باید از یک مربع کوچک‌تر استفاده کنیم. چه‌طور است به‌جای مربع

8×8 یک مربع 7×7 را در نظر بگیریم؟

امیر: فکر خوبی است اما این مسئله هم سخت به نظر می‌رسد.

احسان: خیلی خنده‌دار است! اگر یک مربع 1×1 انتخاب کنیم، خیالت راحت می‌شود؟

امیر: فکر می‌کنم می‌توانیم دستی عمل کنیم. آن‌گاه او یک مربع 1×1 رسم کرد و پرسید: در

این، چند تا مربع وجود دارد؟

احسان: جواب این سؤال را نمی‌دانم؛ شاید یکی.

امیر: البته این زیادی ساده است. شاید ما باید حالت‌های کمی سخت‌تر را بررسی کنیم.

4×4 چه‌طور است؟

احسان: حالا شد؛ کمی صبر کن. فکر می‌کنم سر راست نیست. شاید بهتر باشد با 2×2 یا

3×3 کار کنیم؛ ما باید یک الگو به دست آوریم.

امیر: بله؛ بیا 2×2 را انجام دهیم.

او یک مربع شطرنجی 2×2 رسم کرد و گفت: من چهار مربع می‌بینم.

احسان: من پنج مربع می‌بینم. چهار مربع کوچک و یک مربع بزرگ که کل تصویر را تشکیل می‌دهد.

امیر: دقت تو بیش‌تر است؛ اجازه بدهید 3×3 را بررسی کنیم.

احسان: این سخت‌تر است. صبر کن ببینم؛ نه تا مربع کوچک و

یک مربع بزرگ وجود دارد؛ بنابراین، ده تا مربع می‌شود.

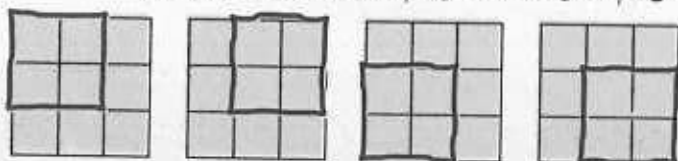
امیر: عجله نکن؛ مربع‌هایی با اندازه‌ی متوسط هم وجود دارد؛ یعنی، مربع‌هایی که 1×1 و

3×3 هم نیستند. این مربع‌ها که لحظه‌ای قبل به آن‌ها نگاه کردیم، 2×2 هستند.

احسان: آن‌ها را می‌بینم. چند تا از آن‌ها (مربع 2×2) وجود دارد؟

امیر: آن‌ها همپوشی هم دارند. فکر می‌کنم چهار تا هستند.

احسان: من هم همین‌طور فکر می‌کنم. (سپس آن‌ها را رسم کرد)



امیر: درست است؛ بنابراین، نه مربع 1×1 و چهار مربع 2×2 و یک مربع 3×3 وجود دارد. جمع این‌ها ۱۴ تا می‌شود. احساس می‌کنم داریم به یک الگو دست پیدا می‌کنیم.

احسان: من هم همین‌طور. یافته‌های خود را چه‌طور می‌توانیم تنظیم کنیم؟

امیر: به نظر من باید جدولی تنظیم کرد.

احسان: چه چیزهایی را باید در جدول قرار دهیم؟

امیر: سؤال خوبی است. اجازه بده ببینم چه چیزهایی داریم؛

تعداد مربع‌ها	اندازه‌ی صفحه‌ی شطرنجی
۱	1×1
۵	2×2
۱۴	3×3

آیا الگویی مشاهده می‌کنید؟

احسان: نه، چیزی مشاهده نمی‌کنم اما حالت آخر جالب است. بیا حالت 4×4 را انجام

دهیم.

امیر: موافقم.

سپیس یک مربع 4×4 رسم کرد.

احسان: درست است؛ واضح است که ۱۶ مربع کوچک

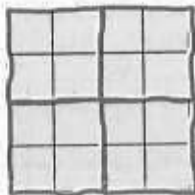
وجود دارد. چند تا مربع 2×2 وجود دارد؟

امیر: نمی‌دانم اما یک مربع بزرگ وجود دارد.

احسان: امیر، بیا با روشی نظام‌دار آن‌ها را به دست آوریم.

امیر: موافقم. ابتدا مربع‌های 2×2 را پیدا کنیم. فکر می‌کنم چهار تا باشند. ما می‌توانیم مربع

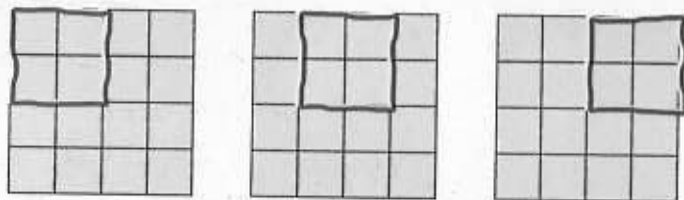
بزرگ را به چهار مربع تقسیم کنیم؛ بنابراین، تعداد آن‌ها همان چهار تا است.



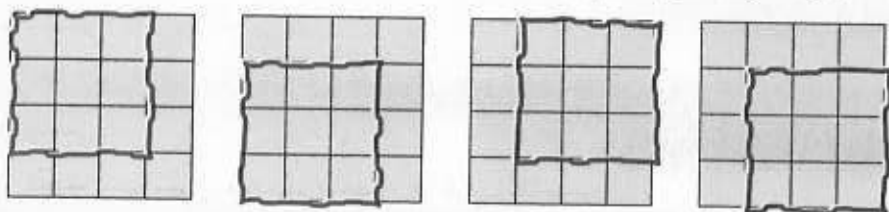
احسان: فکر می‌کنم اشتباه است. در حالت قبلی، مربع‌ها همپوشی هم داشتند. فکر می‌کنم در

این حالت هم، حالتی شبیه حالت قبلی اتفاق می‌افتد. اجازه بده به دوردیف بالایی به‌طور دقیق نگاه

کنیم. می‌توانیم یک مربع 2×2 در سمت چپ قرار دهیم؛ یکی در وسط و یکی در طرف راست. احسان سپس شکل‌های زیر را رسم کرد.



امیر: من می‌توانم این کار را در دومین و سومین ردیف و به‌طور مشابه در دو ردیف آخر هم انجام دهم؛ بنابراین، نه تا مربع 2×2 وجود دارد. فکر می‌کنم که یک الگو می‌بینم.
احسان: من هم همین‌طور؛ شرط می‌بندم که چهار مربع 3×3 هم وجود دارد.
امیر: بله، چهار مربع 3×3 وجود دارد.
سپس شکل‌های زیر را رسم کرد.



احسان: و یک مربع 4×4 وجود دارد. به‌نظر می‌رسد همان‌طور که فکر می‌کردم، الگو به‌صورت مربعی است. ما باید آن را سازمان‌دهی کنیم.
احسان: عجب! این را نگاه کن. اگر دوباره این جدول را سازمان‌دهی

اندازه‌ی صفحه‌ی شطرنجی	تعداد مربع‌ها
1×1	۱
2×2	$4 + 1 = 5$
3×3	$9 + 4 + 1 = 14$
4×4	$16 + 9 + 4 + 1 = 30$

اندازه‌ی صفحه‌ی شطرنجی	مربع‌های 1×1	مربع‌های 2×2	مربع‌های 3×3	مربع‌های 4×4	مجموع
1×1	۱	-	-	-	۱
2×2	۴	۱	-	-	۵
3×3	۹	۴	۱	-	۱۴
4×4	۱۶	۹	۴	۱	۳۰



احسان : یک تن الگو می بینم!

امیر : این حرف را آزمایش کن. ستون اول صعودی است. در ردیف بعدی، عدد مربع کامل بعدی قرار دارد.

احسان : در ستون دوم، سوم و چهارم هم همین الگو وجود دارد.

امیر : اما به ردیف ها که نگاه کنیم، ۱۴ برابر ۱+۴+۹ و ۳۰ برابر ۱+۴+۹+۱۶ است.

احسان : ...

امیر : همدی این تلاش ها برای یافتن الگویی بود که براساس آن بتوانیم مسئله ی اصلی (یعنی تعداد مربع های یک صفحه ی شطرنجی 8×8) را حل کنیم. با توجه به این الگو، تعداد مربع ها در مسئله ی اصلی برابر است با :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$$

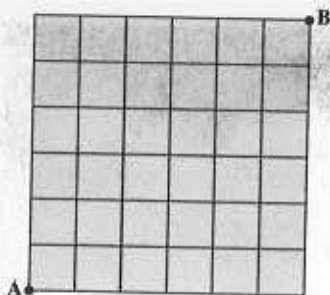
احسان : و جواب (به کمک ماشین حساب) برابر ۲۰۴ است. خیلی خوب است! ما می توانیم

این کار را در مورد صفحه های شطرنجی با هر اندازه ای انجام دهیم.

امیر : بله، می توانیم. تعجب آور است، اگر فرمولی برای این مسئله وجود داشته باشد.

احسان : شرط می بندم فرمولی وجود دارد. شاید آن را بعداً یاد بگیریم.

مسئله ی ۱: تعداد مسیرها. می خواهیم از نقطه ی A به B برویم. مسیر حرکت فقط از روی



شبکه مجاز است. قانون حرکت این است: در جهت افقی به راست و در جهت عمودی رو به بالا می‌توان حرکت کرد؛ یعنی، هر نوع مسیری که این دو قانون در آن رعایت نشود، پذیرفتنی نیست. تعداد همه‌ی مسیرهای از A به B را تعیین کنید.

حل مسئله، خود ویژه‌ترین و خاص‌ترین نوع تفکر آزاد است! اجازه ندهید این موهبت از شما گرفته شود. بکوشید مسئله را به‌طور مستقل حل کنید. این مسئله فرصت بسیار خوبی برای بحث همگانی در مورد راه حل‌ها، در اختیار شما قرار می‌دهد.

مقسوم‌علیه‌ها و معکوس‌های آن‌ها

حاصل جمع مقسوم‌علیه‌های 36° ، برابر 117° است. حاصل جمع معکوس‌های مقسوم‌علیه‌های 36° چه قدر است؟

تلاش ذهنی شما مهم است. جواب مسئله برای شما بهره‌ی فکری نخواهد داشت. رضا راه حل خود را به این ترتیب، برای کلاس توضیح داد:

من، حتی نتوانستم همه‌ی مقسوم‌علیه‌های 36° را تصور کنم؛ چه رسد به این که معکوس‌های مقسوم‌علیه‌های 36° را پیدا کنم و بخوام با هم جمع کنم. به همین دلیل، به فکر یک راه حل ساده‌تر افتادم. من کمی تنبل هستم و بنابراین همیشه و در هر کاری به دنبال راه‌های آسان‌تر می‌گردم. پس، تصمیم گرفتم به جای 36° عدد کوچک‌تری را در نظر بگیرم. البته، مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد خودم را نمی‌دانستم ولی می‌دانستم که چون عدد کوچکی را انتخاب کرده‌ام، می‌توانم آن‌ها را به دست آورم.

عدد ۲۴ را به جای 36° انتخاب کردم که مقسوم‌علیه‌های آن، ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۶ و ۸ و ۱۲ و ۲۴ و ۲۴ است. مجموع را محاسبه کردم:

$$1+2+3+4+6+8+12+24=60$$

چون صورت مسئله را فراموش کرده بودم، یک بار دیگر به مسئله‌ی اصلی برگشتم و معکوس مقسوم‌ها را نوشتم:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$$

از این همه کسر وحشت کردم. بعد از چند لحظه، افکارم را متمرکز کردم و به یاد مخرج

مشترک افنادم و دریافتیم که ۲۴ کوچک ترین مخرج مشترک است.
 کسرهای معادل نیز به ذهنم رسید و همه را به صورت روبه رو نوشتم:
 سپس کسرهای جدید را با هم جمع کردم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} &= \frac{24}{24} \\ \frac{1}{2} &= \frac{12}{24} \\ \frac{1}{3} &= \frac{8}{24} \\ \frac{1}{4} &= \frac{6}{24} \\ \frac{1}{6} &= \frac{4}{24} \\ \frac{1}{8} &= \frac{3}{24} \\ \frac{1}{12} &= \frac{2}{24} \\ \frac{1}{24} &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\frac{24}{24} + \frac{12}{24} + \frac{8}{24} + \frac{6}{24} + \frac{4}{24} + \frac{3}{24} + \frac{1}{24} =$$

$$\frac{24+12+8+6+4+3+2+1}{24} = \frac{60}{24}$$

متوجه شدم که ۶۰ حاصل جمع مقسوم علیه‌هاست. از این

الگو حدس زدم که جواب مسئله کسری است که صورت آن، مجموع

مقسوم علیه‌ها و مخرج آن، خود عدد است. این حدس را روی یک مثال دیگر، آزمایش کردم.

برای این آزمایش، عدد ۱۰ را به جای ۳۶۰ در مسئله‌ی اصلی انتخاب کردم. عدد کوچک‌تر از ۲۴ را به این دلیل انتخاب کردم که بتوانم حدسم را به سرعت آزمایش کنم. مقسوم علیه‌های ۱۰ و معکوس آن‌ها را نوشتم و هر کدام را جمع کردم.

$$1, 2, 5, 10$$

$$1+2+5+10=18$$

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} + \frac{5}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10+5+2+1}{10} = \frac{18}{10}$$

حدسم تأیید شد؛ بنابراین، نتیجه گرفتم که این الگو می‌تواند در مورد ۳۶۰ درست باشد. پس

جواب مسئله $\frac{1170}{360}$ است!

رضا چند حالت خاص و مثال‌های ساده‌تر را انجام داد و برای حل مسئله‌ی اصلی به فرآیندی ساده‌تر دست یافت. او واقعاً این فرآیند را برای مسئله‌ی اصلی اجرا نکرد. ممکن است به جواب رضا شک داشته باشید؛ پس آن را آزمایش کنید. نکته‌ی قابل توجه در این جا این است که استدلالی برای درستی الگو در حالت کلی ارائه نشد. این الگو در حالت کلی درست است. شاید بعداً به آن بپردازیم.

مسئله‌ی ۲: وترها و ناحیه‌ها. بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی را که به وسیله‌ی پنج وتر در دایره

ایجاد می‌شود، بیابید. مسئله را تعمیم دهید.

مسئله‌ها قلب ریاضیات هستند و حل مسئله، قلب یادگیری ریاضی است. خود را در کانون

یادگیری ریاضی قرار دهید.

سعی کنید با مرور راهبردهایی که آموخته‌اید، هوشیارانه‌تر به حل این مسئله بپردازید. بحث همگانی در مورد راه حل‌ها فراموش نشود.



مسئله‌ها

۱. در یک ۲۵ ضلعی، چند قطر می‌توان رسم کرد؟
۲. مجموع اولین ۵۰۰ عدد فرد چه قدر است؟
۳. مساحت یک مربع S^2 است. محیط یک شش ضلعی منتظم T است. اگر P محیط مربع و h اندازه‌ی ضلع شش ضلعی باشد، آن گاه $h + p$ را بر حسب S و T به دست آورید.
۴. تفاضل بین مجموع اولین ۵۰۰ عدد زوج و مجموع اولین ۵۰۰ عدد فرد را بیابید.
۵. آخرین رقم حاصل ضرب $(2^{100})(2^{99})(2^{98}) \dots (2^4)(2^3)(2^2)(2^1)$ چه عددی است؟
۶. نه نقطه به شکلی در صفحه قرار گرفته‌اند که هیچ سه‌تایی از آن‌ها روی یک خط راست نیست. با استفاده از هر سه تا از این نقاط (به عنوان رأس‌های مثلث) چند مثلث متفاوت می‌توان ایجاد کرد؟

۷. الف) فرض کنید a و b و c اعدادی ثابت باشند. دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید.

$$a + b + c$$

$$2^2a + 2b + c = 4a + 2b + c$$

$$3^2a + 3b + c = 9a + 3b + c$$

$$4^2a + 4b + c = 16a + 4b + c$$

$\vdots$

دنباله‌ی تفاضلی دنباله‌ی بالا Δ_1 را این‌طور تعریف می‌کنیم.

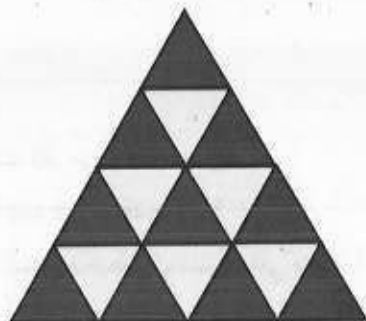
$$\text{جمله‌ی اول} - \text{جمله‌ی دوم} = (2^2a + 2b + c) - (a + b + c)$$

$$\text{جمله‌ی دوم} - \text{جمله‌ی سوم} = (3^2a + 3b + c) - (4a + 2b + c)$$

$$\text{جمله‌ی سوم} - \text{جمله‌ی چهارم} = (4^2a + 4b + c) - (9a + 3b + c)$$

$\vdots$

دنباله‌ی تفاضلی دنباله‌ی بالا را Δ_2 و دنباله‌ی تفاضلی دنباله‌ی Δ_2 را Δ_3 می‌نامیم. همین روند را ادامه می‌دهیم. این دنباله‌ها را محاسبه کنید. چه الگویی مشاهده می‌کنید؟
 ب) فرض کنید d و c و b و a اعدادی ثابت باشند. دنباله‌ای را در نظر بگیرید با جمله‌ی عمومی $an^3 + bn^2 + cn + d$. دنباله‌های تفاضلی متوالی این دنباله را محاسبه و برای آن الگویی ارائه کنید.
 پ) روش دنباله‌ی تفاضلی را برای تعداد مثلث‌های صفحه‌ی شطرنجی به ضلع n به کار بیندید و فرمولی برای این دنباله بیابید.



۸. آیا می‌توانید برای تعداد مستطیل‌های یک مربع 4×4 بدون استفاده از روش تفاضل متناهی الگویی بیابید؟

۹. فرض کنید با شروع کردن از عددهای ۲ و ۷ دنباله‌ی ... و ۸ و ۲ و ۴ و ۷ و ۴ و ۱ و ۷ و ۲ را به این صورت بسازیم که هر دو عنصر متوالی را در هم ضرب کنیم و نتیجه‌ی حاصل را، برحسب این که عددی یک‌رقمی یا دو رقمی است، به عنوان عضو بعدی یا دو عضو بعدی دنباله به آن ملحق کنیم. ثابت کنید که رقم ۶ بی‌نهایت بار در این دنباله تکرار می‌شود.

۱۰. الف) اعداد صحیح ۱ تا 10^{10} را در نظر بگیرید. از میان این اعداد آن‌هایی که رقم ۱ دارند، بیش‌ترند یا آن‌هایی که رقم ۱ ندارند؟

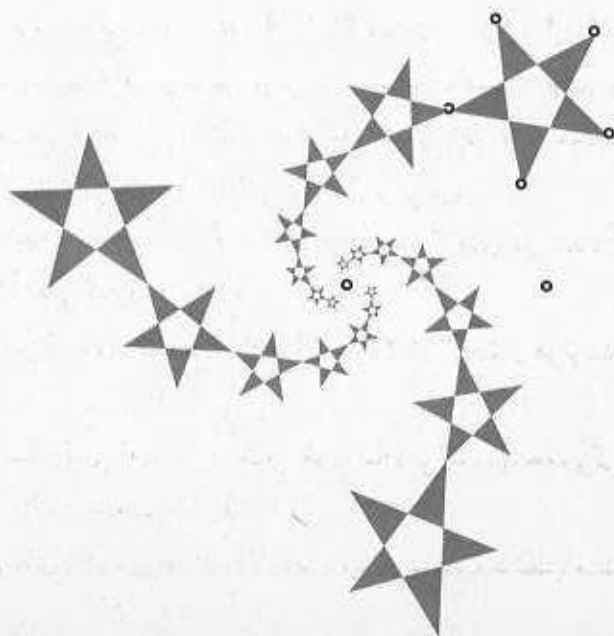
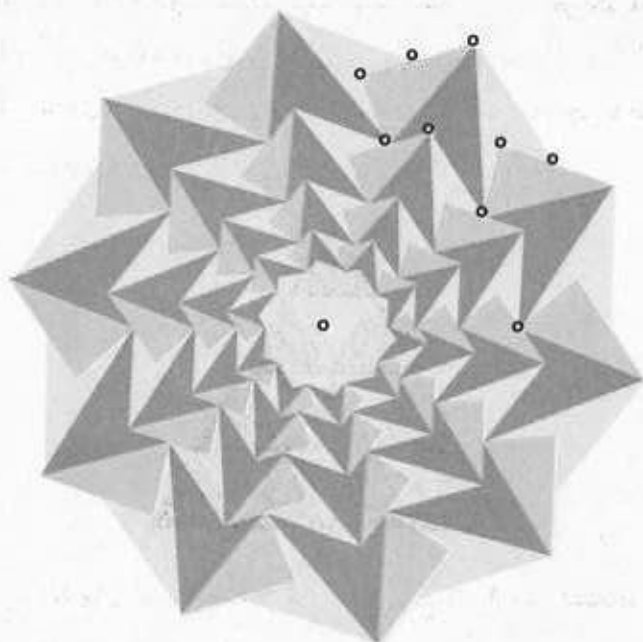
ب) در صورتی که اعداد صحیح از ۱ تا $222,222,222$ به دنبال هم نوشته شده باشد، چند صفر نوشته‌ایم؟

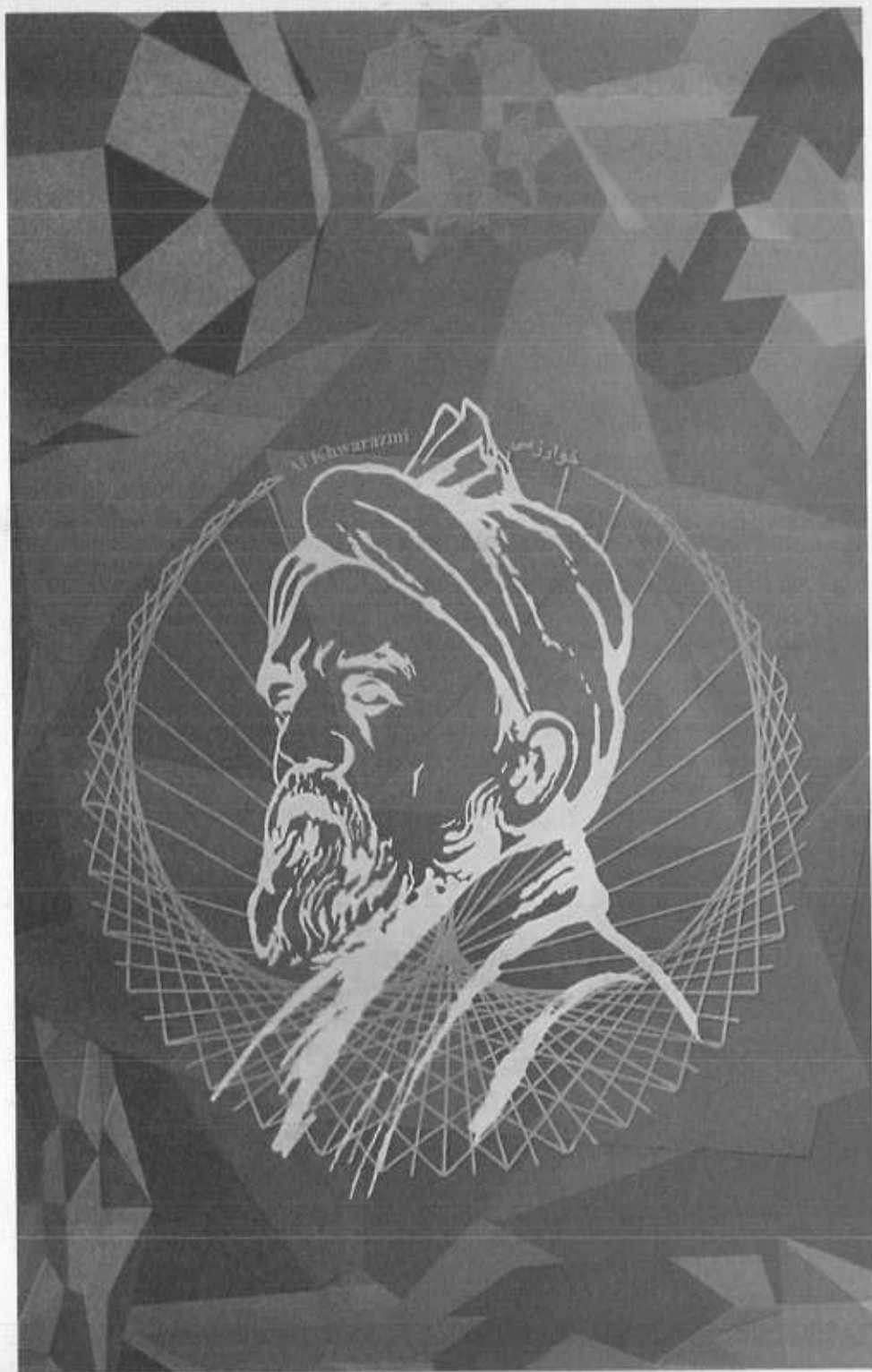
۱۱. به نظر شما، کسی که مسائل را خیلی خوب ساده می‌کند، باید چه ویژگی‌هایی داشته باشد؟ نظریات خود را در کلاس به بحث بگذارید.

۱۲. توانایی‌های راهبرد زیر مسئله را با راهبرد مسائل ساده‌تر و مرتبط با مسئله‌ی اصلی مقایسه کنید.

۱۳. آیا مسئله‌ای را می‌شناسید که بسیار مشکل باشد ولی بتوانید آن را ساده‌تر کنید؟

۱۴. روش رسم طرح‌های زیر را به دست آورید. کم‌ترین عملیاتی را که برای تولید این طرح‌ها لازم است بیابید. آیا این مسئله ارتباطی با راهبرد «مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط با مسئله‌ی اصلی» دارد؟ آن را توصیف کنید.





خوارزمی نخستین ریاضیدان برجسته جهان اسلام، که تاریخ این علم در میان مسلمانان با وی آغاز شده است. در خوارزم به دنیا آمد. مورخان در آثار خود آورده اند که او برای سلطنت بر علوم هندی، هفتری به هند وستان کرده بوده است. خوارزمی یکی از دانشمندان نامدار دربار نامون بوده و همراه با سایر منجمانی که نامون برای اندازه گیری طول قوس یک درجی نصف النهار نامور کرده بود، در این کار شرکت داشت.

تالیفات خوارزمی که هم شامل آثار خود وی و هم شامل خلاصه هایی از آثار ریاضی مقدم بر او می شود، بیش از هر ریاضیدان دیگر، در آیندگان تاثیر داشته است. کتاب فی الجبر والمقابل، که نخستین تالیف اسلامی درباره ی علم جبر بود، نام خود را با این علم درخاورد و با خیر و دوداده است. وی ارقام هندی را وارد جهان اسلامی کرده و از طریق تالیف کتاب یاضی، این ارقام به باختر زمین راه یافت به نام ارقام، عربی شناخته شد. شایده ی از تاثیر وی در مغرب زمین این است که صورت لاتینی شده ی نام وی، آلگورسم (Algorism)، مدت درازی در اغلب زبانهای اروپایی به معنی علم حساب بوده است. هم اکنون این کلمه برای بیان روش دوری از محاسبی آید که صورت قاعده ای پیدا کرده باشد.

۱- ۸- جبر (روش جبری)

اندیشه ی به کارگیری روش های جبری در حل مسائل، متعلق به ریاضی دانان ایران زمین است. خیام و خوارزمی این فکر عالی را ابداع کردند و علم جبر به وسیله ی نیاکان ما به وجود آمد. سالیان بعد، رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶) که ریاضی دان و فیلسوف بود، برای بررسی مسائل طرحی ارائه کرد. طرح او دارای سه گام زیر است:

- ۱- هر مسئله ای - از هر گونه ای که باشد - به یک مسئله ی ریاضی منجر می شود.
 - ۲- هر مسئله ای را - از هر گونه ای که باشد - می توان به یک مسئله ی جبری تبدیل کرد.
 - ۳- هر مسئله ی جبری را می توان به یک معادله تبدیل کرد.
- اگرچه طرح دکارت در همه ی موارد به کار نمی آید ولی مجموعه ی بزرگی از مسائل را می توان با این روش مطالعه کرد.

در ریاضی دوره‌ی راهنمایی، استفاده از نمادها و پس از آن، عبارات‌های جبری و معادله تدریس می‌شود. این شروع جبر و روش‌های جبری است که در درس‌های ریاضی دوره‌ی متوسطه، به‌طور وسیعی به‌کار گرفته می‌شود. برای استفاده از راهبرد جبری در فرآیند حل مسئله، پنج گام وجود دارد:

- ۱- خواندن مسئله،
- ۲- انتخاب نماد برای متغیر،
- ۳- نوشتن معادله،
- ۴- حل معادله،
- ۵- آزمایش کردن جواب.

راهبرد جبری در حل مسئله وقتی همراه با راهبردهای دیگر به‌کار گرفته شود، بسیار کارآمد است و مسائل بسیاری را به‌کمک آن می‌توان حل کرد. به همین دلیل، بعضی از مثال‌هایی را که در بخش‌های گذشته ارائه شده‌اند، با راهبرد جبری نیز بررسی خواهیم کرد.

جمعه بازار

دست‌فروشی اجناس خود را در یک جمعه‌بازار حراج کرده بود. او هر قلم جنس را به قیمت هزار تومان می‌فروخت و سعی می‌کرد به هر مشتری فقط، یک قلم جنس بفروشد؛ البته اگر مشتری‌ها خوب چانه می‌زدند، می‌توانستند جنس مورد نیاز خود را به نصف قیمت هم از او بخرند. دست‌فروش در پایان روز متوجه شد که همه‌ی دوازده قلم جنس خود را فروخته و ۹۵۰۰ تومان به‌دست آورده است. در صورتی که او از هر خریدار فقط یک اسکناس هزار تومانی یا پانصد تومانی دریافت کرده باشد، از هر کدام از این اسکناس‌ها چند تا دارد؟

برای حل این مسئله، ابتدا یک جدول حدس و آزمایش تنظیم کنید و سپس از جبر استفاده کنید. قبل از نگاه کردن به راه‌حل، روی مسئله کار کنید.

معلم جدول حدس و آزمایش را روی تابلو رسم کرد و چگونگی شروع کار روی مسئله را توضیح داد. آن‌گاه، به کمک دانش‌آموزان دو ردیف اول جدول را نوشت.

مقایسه	کل پول	مقدار پانصد تومانی‌ها	مقدار هزار تومانی‌ها	اسکناس پانصد تومانی	اسکناس هزار تومانی
کم‌تر	۸۵۰۰	۳۵۰۰	۵۰۰۰	۷	۵
بیش‌تر	۱۰,۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰۰	۴	۸

معلم قبل از این که به جواب برسد، از دانش آموزان خواست که حل مسئله را به کمک راهبرد جبری ادامه دهند. مینا و پونه این مسئله را با استفاده از راهبرد جبری حل کردند و راه حل هایشان را به این صورت برای کلاس توضیح دادند:

استدلال مینا: ابتدا تصمیم گرفتم تعداد هزار تومانی ها را با t نشان بدهم؛ بنابراین، t را در ستون هزار تومانی ها زیر عدد ۸ نوشتم.

مقایسه	کل پول	کل مقدار پانصد تومانی ها	کل مقدار هزار تومانی ها	پانصد تومانی ها	هزار تومانی ها
				۷	۵
				۴	۸
					t

سپس سعی کردم، بفهمم که در ستون دوم، زیر عدد ۴ چه عبارتی را باید قرار دهم. چون دست فروش ۱۲ قلم جنس داشت، بنابراین، اختلاف ۱۲ و t بایستی تعداد ۵۰۰ تومانی ها را مشخص کند؛ پس در ستون دوم زیر عدد ۴ بایستی یکی از دو عبارت $t-12$ و $12-t$ را می نوشتم؛ من با دوستم، بهاره، روی مسئله کار کردم. او گفت که $t-12$ غلط است. برای این که اگر $t=8$ ، آن گاه $t-12$ برابر -4 می شود که معنی نمی دهد. او گفت که باید $12-t$ را نوشت. دو حدس قبلی را با $t-12$ آزمایش کردیم؛ هر دو درست بودند.

$$12-8=4 \text{ و } 12-5=7$$

بنابراین، تصمیم گرفتیم $t-12$ را در ستون دوم زیر عدد ۴ بنویسیم.

مقایسه	کل پول	کل مقدار پانصد تومانی ها	کل مقدار هزار تومانی ها	پانصد تومانی ها	هزار تومانی ها
				۷	۵
				۴	۸
				$12-t$	t

دوباره به حدس های قبلی نگاه کردم و متوجه شدم که باید ستون های مجموع هزار تومانی ها و پانصد تومانی ها را کامل کنم. این دو ستون را فوراً تکمیل کردم؛ چون می دانستم که باید اولی را در

تو به سوی بالا اشاره می کنی،
تو نماد شکوه و عظمتی.

۱۰۰۰ و بعدی را در ۵۰۰ ضرب کنم.

مقایسه	کل پول	کل مقدار پانصد تومانی ها	کل مقدار هزار تومانی ها	پانصد تومانی ها	هزار تومانی ها
		۳۵۰۰	۵۰۰۰	۷	۵
		۲۰۰۰	۸۰۰۰	۴	۸
	$۱۰۰۰ \times ۵۰۰ (۱۲ - ۱)$	$۵۰۰ (۱۲ - ۱)$	۱۰۰۰×۱	$۱۲ - ۱$	۱

برای محاسبه ی کل پول، مشکلی نداشتیم؛ زیرا می دانستیم که مقدار پانصد تومانی ها و هزار تومانی ها را باید با هم جمع کنیم اما مسئله ی اصلی، نوشتن معادله بود. ابتدا نمی دانستیم این کار را چگونه باید انجام دهیم. با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش و با مشاهده ی ستون آخر جدول، متوجه شدیم زمانی به جواب می رسیم که در ستون آخر نه کلمه ی بیش تر و نه کلمه ی کم تر، بلکه باید کلمه ی مساوی باشد، اما با چه چیزی باید مساوی باشد؟ صورت مسئله را با بهاره دوباره خواندیم و متوجه شدیم که باید با ۹۵۰۰ تومان برابر شود؛ بنابراین، در ستون آخر نوشتیم:

$$۱۰۰۰ \times ۱ + ۵۰۰ (۱۲ - ۱) = ۹۵۰۰$$

در این جا نفس راحتی کشیدیم؛ زیرا حل این معادله کار واقعاً ساده‌ای بود.

$$1000t + 500(12 - t) = 9500$$

$$1000t + 6000 - 500t = 9500$$

$$500t + 6000 = 9500$$

$$500t = 3500$$

$$t = 7$$

من عادت دارم که در پایان عملیات جبری در حل یک مسئله، جواب را با سؤال مسئله مقایسه کنم. در این مسئله وقتی $t = 7$ را به عنوان جواب یادداشت کردم، آن را با سؤال مسئله مقایسه کردم و متوجه شدم که مسئله از ما می‌پرسد:

او از هر نوع اسکناس چند تا دارد؟ در این جا من فقط یک عدد به عنوان جواب داشتم؛ در صورتی که دو نوع اسکناس وجود داشت. به جدول دقت کردم؛ ستون اول و دوم تعداد هر نوع اسکناس را مشخص می‌کرد. معلوم شد اگر تعداد ۱۰۰۰ تومانی‌ها t باشد، تعداد پانصد تومانی‌ها $12 - t$ است؛ بنابراین،

تعداد اسکناس‌های ۵۰۰ تومانی: $12 - 7 = 5$

پونه این مسئله را از راهی مشابه ادامه داد و تصمیم گرفت به جای یک متغیر از دو متغیر استفاده کند. او به جای این که تعداد ۵۰۰ تومانی ها را با $t-12$ نشان دهد، از نماد n استفاده کرد. جدول پونه مانند جدول زیر است :

مقایسه	کل پول	مقدار پانصد تومانی ها	مقدار هزار تومانی ها	کل اسکناس ها	تعداد پانصد تومانی ها	تعداد هزار تومانی ها
کم تر	۷۵۰۰	۲۵۰۰	۵۰۰۰	۱۰	۵	۵
کم تر	۹۰۰۰	۷۰۰۰	۲۰۰۰	۱۶	۱۴	۲
بیش تر	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰	۸۰۰۰	۱۲	۴	۸
	$1000t + 500n = 9500$	$500n$	$1000t$	$t+n$	n	t

پونه از دستگاه دو معادله ی دو مجهولی استفاده کرد. یک معادله به وضوح $1000t + 500n = 9500$ است ولی معادله ی دیگر چگونه به دست می آید؟ ستون سوم، دومین معادله را مشخص می کند. تعداد اسکناس ها برابر تعداد جنس ها است؛ بنابراین، معادله ی دوم $t+n=12$ خواهد بود.

$$\begin{cases} t+n=12 \\ 1000t+500n=9500 \end{cases} \xrightarrow{\times(-500)} \begin{cases} -500t+(-500n)=-6000 \\ 1000t+500n=9500 \end{cases}$$

$$\frac{500t+0}{500t+0} = \frac{3500}{500t+0} = 3500$$

بنابراین، $500t = 3500$ و در نتیجه، $t = \frac{3500}{500} = 7$. برای به دست آوردن n دستگاه زیر داریم :

$$\begin{cases} t+n=12 \\ t=7 \end{cases} \longrightarrow 7+n=12 \longrightarrow n=5$$

پس، دست فروش ۵ اسکناس ۵۰۰ تومانی و ۷ اسکناس ۱۰۰۰ تومانی دارد.

مسئله ی قاطر و الاغ

قاطر و الاغ، باری به وزن چند صد و چند واحد حمل می کردند. الاغ از صاحب خود گله کرد و به قاطر گفت : «اگر فقط صد واحد از بار تو به بار من اضافه شود، سنگینی بار من دو برابر سنگینی بار تو خواهد شد.» قاطر پاسخ داد : «بله، این درست است ولی اگر تو صد واحد از بار خود را به من بدهی، سنگینی بار من سه برابر سنگینی بار تو خواهد شد.» وزن بار الاغ و وزن بار قاطر را پیدا کنید.

بیان یک مسئله‌ی کلامی به زبان ریاضی، یکی از مهارت‌های بسیار مهم ریاضی است. این مسئله را با دو شیوه‌ی جبری حل کنید.

مرغ‌ها و گاوها

یارمحمد کشاورز در مزرعه‌اش مرغ و گاو هم پرورش می‌دهد. او تعداد مرغ‌ها و گاوهایش را به‌خاطر ندارد اما برایش مهم است که بداند روی هم چند تا هستند و چند پا دارند! (شاید با آشپزی قرارداد دارد!) یارمحمد به‌خاطر دارد که مرغ‌ها و گاوهایش روی هم ۵۴ سر و ۱۲۲ پا دارند! او چند مرغ و چند گاو دارد؟

دوباره جدول مربوط به حدس و آزمایش این مسئله را تنظیم کنید. سپس این مسئله را به‌صورت معادله بنویسید و حل کنید.

نگار جدول حدس و آزمایش را به‌کار گرفت. او تعداد گاوها و مرغ‌ها را حدس زد. چون تعداد مرغ‌ها و گاوها ۵۴ تا بود، نگار اعداد ساده‌ی کم‌تر از ۵۴ را مورد آزمایش قرار داد.

آزمایش	کل پاها	پای گاوها	گاوها	پای مرغ‌ها	مرغ‌ها
بیش‌تر	۱۷۶	۱۳۶	۳۴	۴۰	۲۰
بیش‌تر	۱۳۶	۵۶	۱۴	۸۰	۴۰
کم‌تر	۱۱۶	۱۶	۴	۱۰۰	۵۰
	$2d + 4(54 - d)$	$4(54 - d)$	$54 - d$	$2d$	d

او برای اجرای آزمایش خود، کل پاها را با ۱۲۲ مقایسه می‌کرد؛ چون می‌دانست که تعداد پاها باید ۱۲۲ تا باشد؛ بنابراین، معادله‌ی زیر را نوشت و حل کرد.

$$2d + 4(54 - d) = 122$$

$$2d + 216 - 4d = 122$$

$$216 - 2d = 122$$

$$216 - 122 = 2d$$

$$94 = 2d \Rightarrow 47 = d$$

تعداد مرغ‌ها:

$$54 - 47 = 7$$

تعداد گاوها:

وقتی که از حدس و آزمایش به سمت نمادگذاری و جبر می‌رویم، باید دقیقاً با نماد انتخاب شده، مانند قبل، عملیات انجام دهیم.

در این مثال، می‌توان تعداد پای مرغ‌ها را با دو برابر کردن تعداد مرغ‌ها به دست آورد. حدس نخست، ۲۰ مرغ و تعداد پاها $2 \times 20 = 40$ بود. شاید این کار خیلی ساده به نظر برسد ولی مهم است! حوریه هم کلاسی نگار با روش دیگری نمادگذاری کرد و معادله تشکیل داد. او راه حل خود را به این صورت روی تخته نوشت:

مسئله به زبان کلامی	مسئله به زبان جبری
یارمحمد	
تعدادی مرغ و	x
تعدادی گاو	y
پرورش می‌داد.	
او تعداد مرغ‌ها و گاوهایش را نمی‌دانست	$x=? \quad y=?$
اما می‌دانست که آن‌ها روی هم ۵۴ سر دارند	$x+y=54$
به علاوه، می‌دانست که تعداد پاهای مرغ‌ها	$2x$
و تعداد پاهای گاوها	$4y$
روی هم ۱۲۲ تا است.	$2x+4y=122$

$$\begin{cases} x+y=54 \\ 2x+4y=122 \end{cases} \longrightarrow x=54-y$$

بنابراین،

در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم:

$$2(54-y)+4y=122$$

$$108-2y+4y=122$$

$$108+2y=122$$

$$2y=14 \quad \therefore \quad y=7$$

$$x=54-y$$

$$=54-7 \quad \therefore \quad x=47$$

یارمحمد ۷ گاو و ۴۷ مرغ دارد.

روش جبری که حوریه با هوشمندی آن را به کار گرفت، حاوی چند نکته‌ی اساسی است. او مسئله را با کلام خودش نوشت؛ به این ترتیب که کلمات کلیدی مسئله را با دقت نگاه داشت و کلمه‌های

اضافی را کنار گذاشت. حوریه با شیوهای بسیار زیرکانه صورت مسئله را طوری زیر هم نوشت که بتواند نمادهای جبری مربوط به آنها را رویه‌رویشان بنویسد. او معنی کلمه‌ی «روی هم» را خوب می‌دانست و به خوبی می‌دانست که اگر تعداد مرغ‌ها را دو برابر کند، تعداد پاهای آنها به‌دست می‌آید و اگر تعداد گاوها را چهار برابر کند، تعداد پاهای آنها به‌دست می‌آید.

شما نیز برای این که در این روش مهارت پیدا کنید، باید کلمه‌های کلیدی هر مسئله را با دقت تشخیص دهید. می‌توانید زیر آنها خط بکشید.

پارمحمد کشاورز در مزرعه‌اش مرغ و گاو پرورش می‌دهد. او تعداد مرغ‌ها و گاوهایش را به‌خاطر ندارد اما برایش مهم است که روی هم چند تا هستند و چند پا دارند! (شاید با آشنایی قرارداد دارد!) پارمحمد به‌خاطر دارد که مرغ‌ها و گاوها روی هم ۵۴ سر و ۱۲۲ پا دارند. او چند مرغ و چند گاو دارد؟

مسئله‌ی ۱: پیرامون زمین بازی

محیط یک زمین بازی مستطیل شکل، ۳۷۰ متر است. طول زمین از دو برابر عرض آن ۴۰ متر کم‌تر است. مساحت این زمین بازی را تعیین کنید.

این مسئله را با کمک راهبرد جبری حل کنید. همانند مسئله‌ی مرغ‌ها و گاوها، مسئله را از دو مسیر مورد بررسی قرار دهید و سپس راه‌حل‌ها را به بحث بگذارید.



حدس و آزمایش برای تنظیم یک معادله‌ی جبری مفید است؛ نه به این معنی که حتماً باید برای تنظیم یک معادله از حدس و آزمایش استفاده کرد. اگر در نوشتن معادله‌ی مربوط به یک مسئله مهارت کافی ندارید، ابتدا جدولی از حدس‌ها و آزمایش‌ها تنظیم کنید.

محلول آب‌نمک

مغازه‌داری محلول آب‌نمک برای مخزن‌های ماهی عرضه می‌کند. متأسفانه به علت ناوارد بودن کارگر جدید مغازه، محلول آب‌نمک رقیق شده است و برای مخزن‌های ماهی مناسب نیست. اکنون ۱۵۰ کیلو محلول آب‌نمک ۴ درصدی در مغازه موجود است، درحالی که مغازه‌دار محلول آب‌نمک ۷ درصدی می‌خواهد. دو راه اختیاری برای تهیه‌ی محلول ۷ درصدی از محلول ۴ درصدی پیشنهاد می‌شود:

الف) افزودن نمک،

ب) تبخیر کردن محلول آب‌نمک ۴ درصدی.

در حالت الف، چه مقدار نمک باید افزوده شود و در حالت ب، چه مقدار آب باید تبخیر گردد؟
سمانه و بهناز و گلرخ در یک گروه کوچک روی این مسئله کار کرده‌اند. مسیر فکری آن‌ها را بی‌می‌گیریم.

سمانه: من همیشه از مسئله‌ی مخلوط کردن متنفر بوده‌ام.

بهناز: ما می‌توانیم این کار را انجام دهیم. بیایید یک جدول حدس و آزمایش تنظیم کنیم. ما احتیاج داریم بدانیم که چه چیزهایی را می‌دانیم و چه کاری را باید انجام دهیم.

گلرخ: ما ۱۵۰ کیلو محلول داریم که ۴ درصد نمک دارد. چه مقدار از این محلول، نمک است؟
سمانه: این کاملاً شبیه یک زیر مسئله است. چهار درصد ۱۵۰، برابر ۶ است؛ بنابراین، در محلول اولیه ۶ کیلو نمک و ۱۴۴ کیلو آب است.

بهناز: کدام قسمت را بایستی ابتدا انجام دهیم؟

گلرخ: اجازه دهید قسمت الف را انجام دهیم. در این جا به جدول حدس و آزمایش من نگاه کنید. مقدار اضافه شدن نمک را حدس می‌زدم. سه ستون اول تغییر نکرد.

درصد نمک	کل محلول	کل نمک	نمک افزوده شده	آب اولیه	نمک اولیه	محلول اولیه
$\frac{7}{151} = 4.6\%$	۱۵۱	۷	۱	۱۴۴	۶	۱۵۰
$\frac{16}{160} = 10\%$	۱۶۰	۱۶	۱۰	۱۴۴	۶	۱۵۰

بهناز: فکر می‌کنم این جدول را باید دنبال کنیم. مقدار نمکی را که باید اضافه شود، حدس بزنید. من وقتی به ستون کل محلول می‌رسم، مشکل پیدا می‌کنم. نمی‌دانم عدد مربوط به آن را چگونه به دست آورم.

سمانه: من توضیح می‌دهم. وقتی مقداری نمک در محلول می‌ریزم، این مقدار با مقدار قبلی محلول جمع می‌شود و کل محلول را به وجود می‌آورد؛ یعنی، باید مقدار نمک اضافه شده را با 15° کیلو محلول جمع کنیم.

بهناز: درست است؛ متوجه شدم. پس از این کار باید مقدار نمک را بر مقدار محلول تقسیم کنیم تا درصد نمک محلول به دست آید. البته به صورت یک عدد اعشاری خواهد بود که باید در 10° هم ضرب شود.

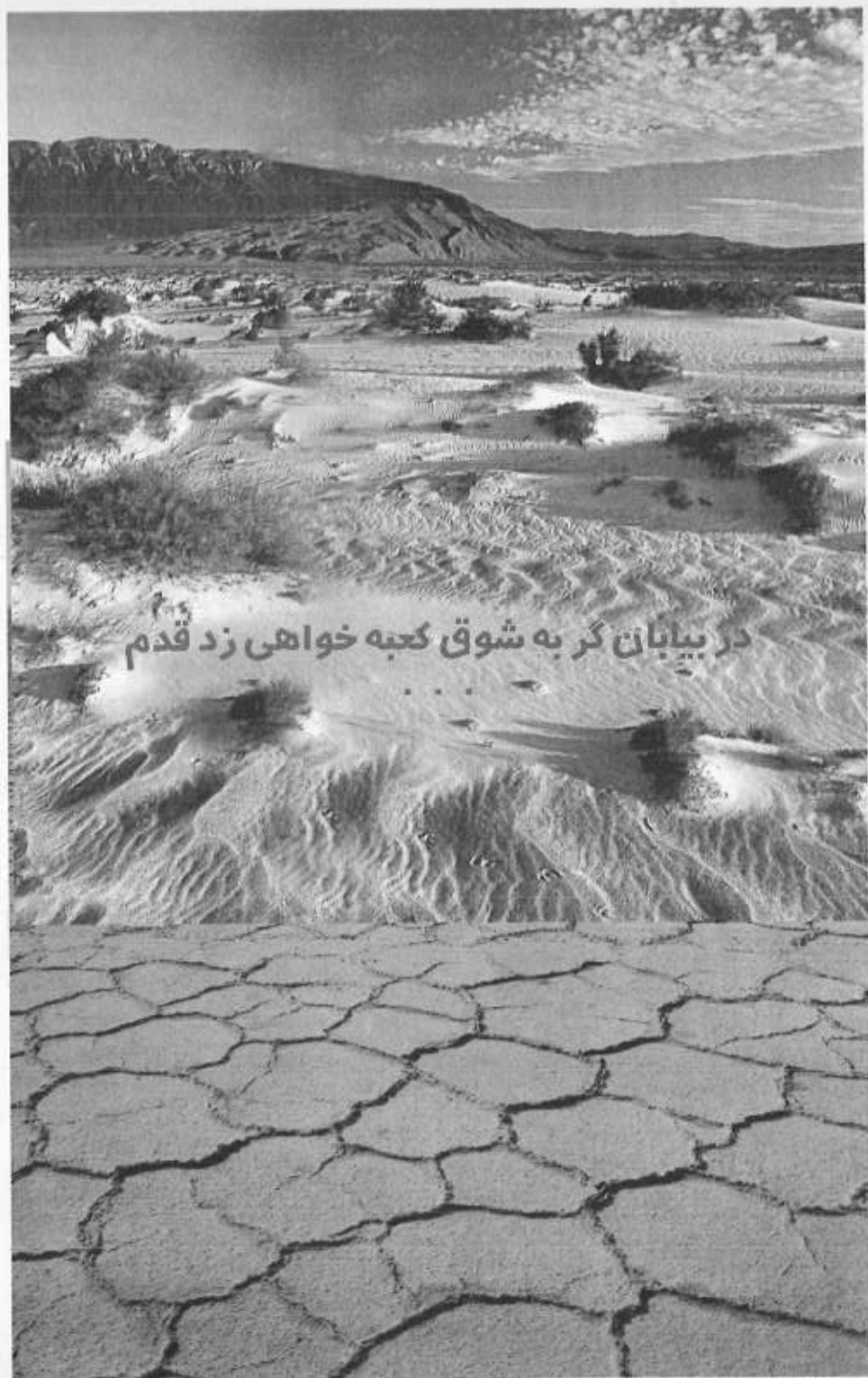
گلرخ: درست! از روی جدول معلوم است که جواب صحیح باید بین ۱ و 10° باشد. بهناز: فکر می‌کنم باید از راهبرد جبری استفاده کنیم. حدس زدن بیش‌تر وقت می‌گیرد. احتمالاً با جواب اعشاری مواجه هستیم.

گلرخ: بله، بیایید از جبر استفاده کنیم. کاری را که باید انجام دهیم چیست؟ سمانه: ساده است؛ حدس را یک متغیر می‌گیریم. x را به جای مقدار نمکی می‌گذاریم که باید اضافه شود. در ستون مقدار نمک افزوده شده در سطر سوم، x را قرار می‌دهیم.

بهناز: بنابراین، در ستون کل نمک باید $x+6$ داشته باشیم. در ستون محلول جدید نیز باید $x+15^\circ$ را قرار دهیم و در ستون درصد نمک، یک کسر قرار می‌گیرد. درست شبیه عددها باید انجام دهیم. گلرخ: معادله را چگونه تشکیل دهیم؟

درصد نمک	کل محلول	کل نمک	نمک افزوده شده	آب اولیه	نمک اولیه	محلول اولیه
$\frac{7}{151} = 4.6\%$	151	7	1	144	6	15°
$\frac{16}{160} = 10\%$	160	16	10	144	6	15°
$\frac{x+6}{x+150}$	$x+150$	$x+6$	x	144	6	15°

بهناز: ساده است. ستون درصد نمک یا درصد نمک در محلول جدید باید 7% باشد تا جواب به دست آید؛ بنابراین، کسر $\frac{x+6}{x+150}$ را برابر 7% یا 0.07 قرار می‌دهیم. آن‌گاه معادله را حل می‌کنیم.



در بیابان گر به شوق کعبه خواهی زد قدم

بهناز معادله را حل کرد و گفت : خوش بختانه کار می کند.

$$\frac{x+6}{x+150} = 0.07$$

$$x+6 = 0.07(x+150)$$

$$x+6 = 0.07x + 10.5$$

$$0.93x = 4.5$$

$$x = \frac{4.5}{0.93} = 4.84 \rightarrow \text{کیلو}$$

۴/۸۴ کیلو، مقدار نمکی است که باید اضافه کنیم.

گلرخ : چندان بد نبود. باید ۴/۸۴ کیلو نمک به محلول اضافه کرد تا محلول ۷٪ به دست آید.

این، مقدار زیادی نمک می خواهد. شاید بهتر بود آب محلول را تبخیر می کردیم.

بهناز : اجازه دهید این کار را هم انجام دهیم. دوباره از حدس و آزمایش شروع می کنیم. من در جدول حدس و آزمایش سه ستون اول را نمی نویسم؛ زیرا شبیه قبلی است! می خواهم حدس را روی آب تبخیر شده قرار دهم.

درصد نمک در محلول	کل محلول	کل آب	مقدار کسر شدن آب
$\frac{6}{146} = 4.1\%$	۱۴۶	۱۴۰	۶
$\frac{6}{130} = 4.6\%$	۱۳۰	۱۲۴	۶

سمانه : عجب! از این هم بیش تر است. بیایید جبر را به کار بگیریم.

گلرخ : درست است؛ x را در ستون مقدار کسر شدن آب قرار می دهیم.

درصد نمک در محلول	کل محلول	کل آب	مقدار کسر شدن آب
$\frac{6}{146} = 4.1\%$	۱۴۶	۱۴۰	۶
$\frac{6}{130} = 4.6\%$	۱۳۰	۱۲۴	۶
$\frac{6}{150-x}$	$150-x$	$146-x$	x



روش جبری پیچ و خم‌های پنهان مسیر را آشکار می‌سازد.

بهناز: بنابراین، ما می‌خواهیم $\frac{6}{150-x}$ برابر 7% یا 0.07 باشد.

$$\frac{6}{150-x} = 0.07$$

$$6 = 0.07(150-x)$$

$$6 = 10.5 - 0.07x$$

$$-0.07x = -4.5$$

$$0.07x = 4.5$$

$$x = \frac{4.5}{0.07}$$

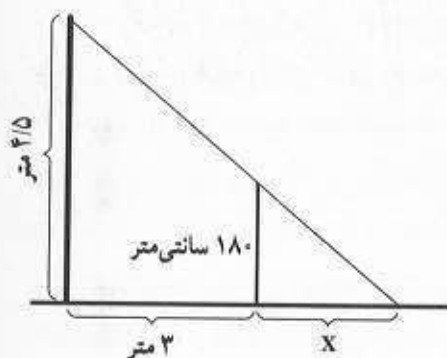
$$x = 64.29 \rightarrow \text{کیلو}$$

بهناز: انجام دادن این کار هم برای کارگر سخت است.

همان‌گونه که دیدیم، راهبردهای حدس و آزمایش و جبر به همراه یک‌دیگر برای حل مسئله بسیار کارآمد و قدرتمند هستند. اگر جواب مسئله عدد درست نباشد، روش حدس و آزمایش شاید یک روز وقت بگیرد! در چنین وضعیت‌هایی استفاده از جبر بهترین راه‌حل مسئله است.

مسئله ۲: مسئله‌ی شیرکاکائو را با استفاده از راهبردهای حدس و آزمایش و جبر حل کنید و سپس، راه‌حل‌ها را در کلاس به بحث بگذارید. یکی از نشانه‌های تفکر خلاق، حل کردن یک مسئله از راه‌های گوناگون و با روش‌های مختلف است.

هنگامی که جبر با راهبردهای رسم یک شکل یا حدس و آزمایش پیوند می‌خورد، به راهبردی بسیار مؤثر تبدیل می‌شود. اگرچه مسائل زیادی وجود دارند که آن‌ها را نمی‌توان از راه جبری حل کرد ولی بسیاری از مسائل ریاضی را با استفاده از معادله و جبر می‌توان حل کرد. علاوه بر این، مهارت تبدیل یک مسئله به معادله‌ی جبری بسیار ارزشمند است.



سایه

قد شخصی ۱۸۰ سانتی متر است. او هر شب هنگام پیاده‌روی، از کنار چراغ‌های مخصوص روشنایی خیابان که بلندی آن‌ها $\frac{4}{5}$ متر است، می‌گذرد. سایه‌ی این شخص، هنگامی که به سه متری چراغ روشنایی می‌رسد، چند متر است؟

از رسم شکل و جبر استفاده کنید. آیا

راهبرد حدس و آزمایش به حل این مسئله کمک می‌کند؟ قبل از مطالعه‌ی راه‌حل، روی مسئله کار کنید. سامان شکل بالا را رسم کرد تا وضعیت مسئله را در آن نشان دهد. او توضیح داد که «ابتدا این تصویر را کشیدم و دیدم که سایه در کجا قرار می‌گیرد. طول سایه را با x نشان دادم.»

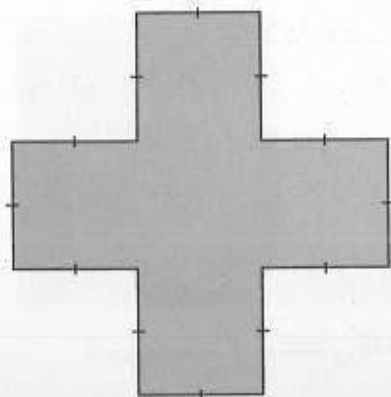
مسئله: ادامه‌ی توضیحات سامان را حدس بزنید و حل مسئله را کامل کنید.



مسئله‌ها

۱. برای سه تا از مسئله‌هایی که در بخش حدس و آزمایش حل کرده‌اید، یک معادله بنویسید.

۲. رحیم به اندازه‌ی ۳۲۵ تومان، سکه‌ی پنج تومانی و ده تومانی دارد. سکه‌های پنج تومانی او هشت تا بیش‌تر از سکه‌های ده تومانی اوست. او از هر نوع سکه چند تا دارد؟
۳. دو زاویه‌ی مکمل را در نظر بگیرید که اندازه‌ی یکی از آن‌ها ۶ درجه بیش‌تر از دو برابر اندازه‌ی دیگری باشد. اندازه‌ی هریک از زاویه‌ها چه قدر است؟
۴. خانه‌ی بهرام از خانه‌ی دوستش، احسان، ۱۵ کیلومتر فاصله دارد. روزی بهرام با دوچرخه به طرف خانه‌ی احسان حرکت کرد. پس از نیم ساعت دوچرخه‌اش پنجرشید. او بقیه‌ی راه را در سه ساعت پیاده پیمود. اگر سرعت پیاده‌روی بهرام یک چهارم سرعت دوچرخه راندنش باشد، سرعت او هنگام دوچرخه راندن چه قدر بوده است؟
۵. گروهی از دانش‌آموزان به وسیله‌ی تعدادی اتوبوس و مینی‌بوس برای شرکت در یک دوره مسابقه‌ی ورزشی به اردوگاهی منتقل شدند. وقتی یک اتوبوس و دو مینی‌بوس به اردوگاه رسیدند، ۷۳ نفر دانش‌آموز پیاده شدند. چند دقیقه بعد، دو اتوبوس و یک مینی‌بوس دیگر هم از راه رسیدند. این بار تعداد دانش‌آموزان ۹۸ نفر بود. به این ترتیب در مجموع، سه اتوبوس و هشت مینی‌بوس دانش‌آموزان را به اردوگاه منتقل کرد: تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در مسابقات چند نفر بود؟
۶. راضیه و رضا می‌خواهند ماشین پدرشان را بشویند. راضیه به تنهایی می‌تواند ماشین را در ۲۰ دقیقه بشوید. رضا هم به تنهایی آن را در ۳۰ دقیقه می‌شوید. اگر هر دو آن‌ها با هم کار کنند، شستن ماشین چه مدت زمانی طول می‌کشد؟
۷. با یک نفر متخصص که در کار خود از جبر استفاده می‌کند، مصاحبه کنید.
۸. نامتناهی جواب صحیح مثبت برای معادله‌ی $a^2 + b^2 = c^2$ به دست بیاورید.
۹. الف) نشان دهید نقطه‌ی $(\frac{1}{3}, \sqrt{2})$ از نقاط صحیح‌المختصات، فواصل متمایز دارد.
ب) آیا برای هر عدد طبیعی n می‌توان دایره‌ای در صفحه رسم کرد که دقیقاً n نقطه با مختصات صحیح را در بر داشته باشد؟



۱۰. شکل روبه‌رو از پنج مربع برابر تشکیل شده است. می‌خواهیم با دو بُرش در امتداد خط‌های راست، این شکل را طوری به سه بخش تقسیم کنیم که با کنار هم قراردادن آن‌ها دو مربع به هم چسبیده‌ی برابر بسازیم. بُرش دوم، یکی از بخش‌های بُرش اول را در امتداد خط راست به دو قسمت تقسیم می‌کند. به علاوه دو مربع به هم چسبیده باید طوری ساخته

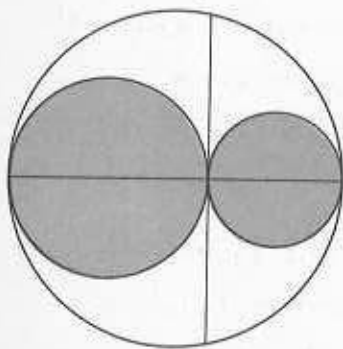


شوند که هیچ شکافی بین آن وجود نداشته باشد. این بُرش‌ها چگونه باید باشند؟ (به کلام دیگر، چگونه می‌توان با دو بُرش از پنج مربع برابر، دو مربع برابر ساخت؟)

۱۱. مغازه‌ای که در مقابل دبیرستان، نمونه‌ی جدید خودنویس را ۵۰۰ تومان قیمت گذاشته بود. فروشنده‌ی مغازه وقتی دید خریداری پیدا نمی‌شود در قیمت تخفیفی قایل شد و توانست همه‌ی خودنویس‌ها را به قیمت سی و یک هزار و نهصد و سی تومان بفروشد. قیمت خودنویس‌ها را بعد از تخفیف پیدا کنید. آیا شرط‌ها برای تعیین مجهول کافی هستند؟

۱۲. عددی طبیعی طوری پیدا کنید که اگر ۱۰۰ واحد یا ۱۶۸ واحد به آن اضافه کنیم، مجذور کامل به دست آید.

۱۳. مسئله‌ی پرتقال‌فروش را با کمک روش جبری حل کنید و آن را با روش حدس و آزمایش مقایسه نمایید.



۱۴. در شکل روبه‌رو مرکز سه دایره روی یک خط راست قرار دارند. مساحت قسمت رنگ شده را به دست آورید. برای محاسبه‌ی عددی پاسخ، دست کم به چند داده روی شکل نیاز است؟

۱۵. مسئله‌ای را با استفاده از دو روش جبری کاملاً متفاوت حل کنید.

۱۶. دکارت را واضح روش جبری می‌دانند. او عقیده داشت که حل هر مسئله‌ای را می‌توان به یک معادله منجر کرد. در مورد نظر او در کلاس بحث کنید.

۱۷. به نظر شما آیا ممکن است برای یک مسئله دو راه حل جبری پیدا کرد که یکی خیلی کوتاه‌تر از دیگری باشد؟

تو نشانه ای،
تو به آدمیان جهت را نشان می دهی،
تو یادآور صبر و استقامتی.

ریاضیات ملکه ی علوم است و نظریه ی اعداد سلطان آن

الگویابی و نظریه‌ی اعداد

سقراط : حالا فرض کن کسی به آنان (استادان علم حساب) بگوید : «ای دوستان من، این اعداد شگفت‌انگیز که در باب آن‌ها استدلال می‌کنید چیستند؟» به این سؤال چه جوابی می‌دهند؟ گلاوکن : تصور می‌کنم چنین جواب دهند که از اعدادی سخن می‌گویند که فقط به قوه‌ی مُدرکه قابل فهم‌اند.

سقراط : بنابراین، ملاحظه می‌کنی که این علم را حقیقتاً می‌توان ضروری دانست؛ زیرا — چنان‌که آشکار است — موجب به‌کار افتادن تفکر محض در نیل به حقیقت مطلق می‌باشد.

افلاطون. — جمهور

عددهای طبیعی کدام‌اند؟ آنانند که ابتدا از یکی‌کنند و زیادت یک یک همی‌کنند، چون ۲، ۱، ۰، ۳، ۴، ۵،

ابوریحان بیرونی — التفهیم

خدا اعداد صحیح را آفرید؛ باقی، کار آدمی است.

کرونکر

در نظریه‌ی اعداد، به شناخت ویژگی‌های اعداد و بررسی روابط بین اعداد صحیح می‌پردازیم. این شاخه از ریاضی از دیرباز برای ریاضی‌دانان جاذبه‌های فراوان داشته و همواره پهنه‌ی بروز خلاقیت‌های آنان بوده است. امروز نیز نظریه‌ی اعداد هم‌چنان محملی برای شکوفایی استعدادهای پنهان نوجوانان، جوانان و ریاضی‌دانان است. علاوه بر این، نظریه‌ی اعداد در علوم کاربردی نظیر مخابرات و رمزنگاری نیز کاربردهای وسیعی پیدا کرده و هم‌چنان یکی از شاخه‌های پویا و فعال ریاضیات است.

۲-۱- تقسیم

تقسیم کردن، عمل متقابل ضرب کردن محسوب می‌شود؛ همان‌گونه که تفریق کردن در مقابل جمع کردن است. عمل تقسیم و عمل ضرب را می‌توان بر اساس تفریق و جمع تفسیر کرد و درک عمیق‌تری به دست آورد.

در اولین مراحل یادگیری، می‌آموزیم که 3×5 یعنی سه بار پنج را با هم جمع کنیم.

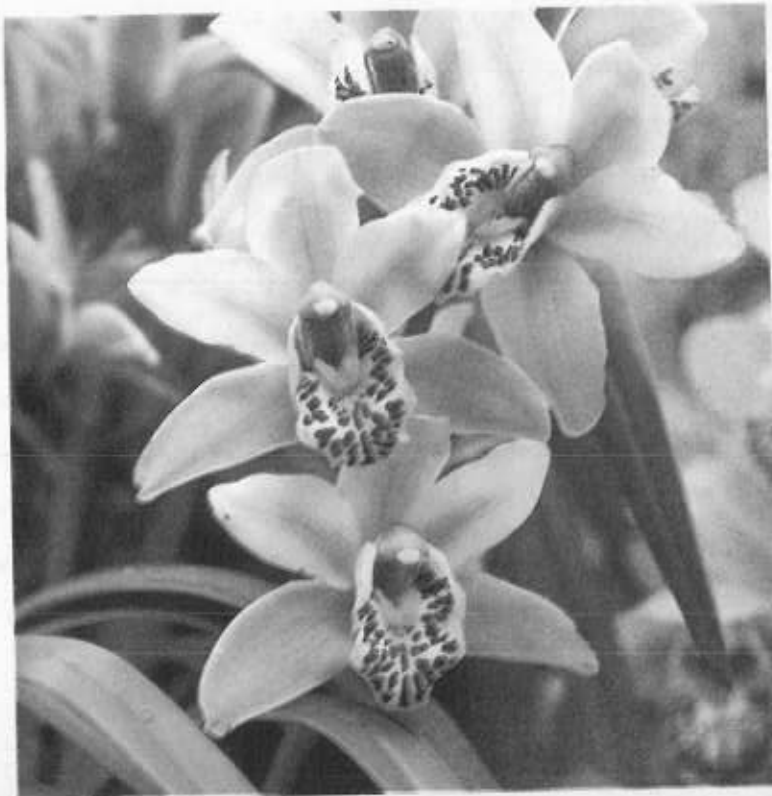
$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

بنابراین، ضرب کردن نوعی جمع کردن است. اکنون اگر ۱۵ را بر ۵ تقسیم کنیم، عدد ۳ به دست می‌آید.

$$15 \div 5 = 3$$

یعنی در ۱۵ تا سه تا ۵ وجود دارد. اکنون اگر سه بار ۵ را از پانزده برداریم (کم کنیم)، هیچ چیزی باقی نمی‌ماند (باقی‌مانده صفر می‌شود).

$$15 - 5 = 10, 10 - 5 = 5, 5 - 5 = 0$$



بنابراین، تقسیم را می‌توان نوعی کم کردن دانست. آزمایشی دیگر انجام می‌دهیم: ۲۳ را بر ۵ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 5} \\ 20 \\ \hline 3 \end{array}$$

خارج قسمت ۴ و باقی‌مانده ۳ است؛ یعنی، در ۲۳، چهار تا ۵ تایی وجود دارد و ۳ تا یکی باقی می‌ماند. اکنون به روش کم کردن آزمایش می‌کنیم.

$$23 - 5 = 18, \quad 18 - 5 = 13, \quad 13 - 5 = 8, \quad 8 - 5 = 3$$

چهار بار عدد ۵ را کم کردیم و سه تا باقی ماند!

این آزمایش تأیید می‌کند که تقسیم کردن نوعی تفریق کردن است. بعد از این تفسیر از عمل تقسیم کردن، به سال‌هایی برمی‌گردیم که برای اولین بار در دبستان با تقسیم آشنا شدیم. از سال‌های دبستان و درس تقسیم به یاد داریم که همواره بعد از تقسیم کردن، باید آن را امتحان کرد. یک نمونه را تکرار می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \text{مقسوم علیه } 5 \\ 23 \overline{) 5} \\ 20 \\ \hline 3 \end{array}$$

خارج قسمت ۴

باقی‌مانده ۳

برای امتحان درستی عمل تقسیم، بایستی:

۱- باقی‌مانده کوچک‌تر از مقسوم علیه باشد.

۲- حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه به اضافه‌ی باقی‌مانده، باید برابر مقسوم باشد.

دستور اول درست است؛ یعنی:

$$3 < 5$$

$$\text{باقی‌مانده} + \text{مقسوم علیه} \times \text{خارج قسمت} = \text{مقسوم}$$

$$23 = 4 \times 5 + 3$$

دستور دوم هم درست است؛ بنابراین، عمل تقسیم درست انجام شده است.

آنچه به عنوان امتحان عمل تقسیم انجام گرفت، یکی از مفاهیم مهم نظریه‌ی اعداد است که به

«قضیه‌ی تقسیم» شهرت دارد. اکنون به بیان این مفهوم زیربنایی می‌پردازیم.

قضیه‌ی تقسیم

برای دو عدد صحیح a و b - که عدد b غیر صفر است - دو عدد صحیح و منحصر به فرد q و r پیدا می‌شود؛ طوری که:

$$a = q \times b + r \text{ و } 0 \leq r < b$$

مقسوم علیه < باقی مانده و باقی مانده + مقسوم علیه $\times$ خارج قسمت = مقسوم

تعریف: اگر در قضیه‌ی تقسیم، باقی مانده صفر شود ($r=0$) می‌گوییم a بر b بخش پذیر است.

تعیین باقی مانده‌ی تقسیم مجموع چند عدد:

باقی مانده‌ی تقسیم $۸۷۸۲ + ۷۵۷۴ + ۳۸۹۲ + ۴۵۳۳$ بر ۹ را بیابید.

مهرداد راه حل خود را این گونه توضیح می‌دهد:

این مسئله بسیار ساده است. عددها را با هم جمع کردم:

$$۸۷۸۲ + ۷۵۷۴ + ۳۸۹۲ + ۴۵۳۳ = ۲۴۷۸۱$$

حاصل جمع را بر ۹ تقسیم کردم؛ باقی مانده برابر ۴ شد.

تقریباً بیش‌تر بچه‌های کلاس، مسئله را از این راه حل کردند اما چند نفر روش‌های دیگری را

به کار بردند. مجتبی راه حل خود را به این صورت شرح داد:

من ابتدا هر کدام از عددها را بر ۹ تقسیم کردم؛ باقی مانده‌ی تقسیم ۸۷۸۲ بر ۹ عدد ۷ شد و

سه عدد بعدی به ترتیب باقی مانده‌های ۵ و ۴ و ۶ داشتند. باقی مانده‌ی حاصل جمع آن چهار عدد، برابر

جمع باقی مانده‌های هریک می‌شود؛ یعنی باقی مانده برابر $۷ + ۶ + ۴ + ۵ = ۲۲$ است!

علی در مورد کار خودش روی این مسئله چنین گفت:

من هم مثل مجتبی مسئله را حل کردم ولی قضیه‌ی تقسیم را به خاطر داشتم و می‌دانستم

باقی مانده باید از مقسوم علیه کوچک‌تر باشد. به همین دلیل، متوجه شدم که پاسخ اشتباه است و بعد

احساس کردم که باید ۲۲ را بر ۹ تقسیم کنم. این کار را انجام دادم و باقی مانده ۴ به دست آمد.

دقت علی ستودنی است. شاید بتوان این روش را تعمیم داد و از آن برای محاسبه‌ی باقی مانده‌ی

حاصل جمع تعدادی عدد استفاده کرد. این روش را در حالت کلی بررسی می‌کنیم.

در حالت کلی، برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم مجموع چند عدد بر یک عدد مانند d ، کافی

است هریک از اعداد را بر d تقسیم کنیم. سپس باقی مانده‌ها را جمع کرده مجموع آن‌ها را نیز بر d

تقسیم کنیم. این باقی مانده همان باقی مانده‌ی مجموع چند عدد بر d است.

سعی کنید قبل از مطالعه‌ی استدلال این روش، خودتان استدلال کنید.



فرض می‌کنیم a و b دو عدد صحیح هستند؛ طبق قضیه‌ی تقسیم می‌توان نوشت:

$$a = q_1d + r_1 \quad ; \quad 0 \leq r_1 < d$$

$$b = q_2d + r_2 \quad ; \quad 0 \leq r_2 < d$$

$$a + b = (q_1d + r_1) + (q_2d + r_2)$$

$$= q_1d + q_2d + (r_1 + r_2)$$

$$= (q_1 + q_2)d + (r_1 + r_2)$$

اکنون اگر قرار دهیم $q' = q_1 + q_2$ ، $c = a + b$ ، آن‌گاه:

$$c = q'd + (r_1 + r_2)$$

اگر $r_1 + r_2 < d$ که طبق قضیه‌ی تقسیم $r_1 + r_2$ باقی‌مانده‌ی تقسیم $a + b$ بر d است. در غیر

این صورت، $r_1 + r_2$ را بر d تقسیم می‌کنیم تا باقی‌مانده به دست آید.

$$r_1 + r_2 = nd + r' \quad \text{و} \quad r' < d$$

در این صورت، داریم:

$$c = q'd + nd + r' \quad ; \quad 0 \leq r' < d$$

$$= (q' + n)d + r' \quad ; \quad 0 \leq r' < d$$

اکنون شرایط قضیه‌ی تقسیم برقرار است و درستی روش تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم مجموع

چند عدد بر یک عدد، تأیید می‌شود.

مثال: باقی مانده‌ی تقسیم ۸۷۵۶۳۲۳۴ بر ۹ را به دست آورید. اگر از روش بالا استفاده کنیم، به تقسیم نیازی نیست!

$$۸۷۵۶۳۲۳۴ = ۸ \times ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ + ۷ \times ۱,۰۰۰,۰۰۰ + ۵ \times ۱۰۰,۰۰۰ + ۶ \times ۱۰,۰۰۰ + ۳ \times ۱,۰۰۰ + ۲ \times ۱۰۰ + ۳ \times ۱۰ + ۴$$

کافی است باقی مانده‌ی هر جمله را جداگانه به دست آوریم.

$$۸ \times ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ = ۸(۹۹۹۹۹۹ + ۱) = ۸ \times ۹ \times (۱۱۱۱۱) + ۸$$

در این جا، جمله‌ی $۸ \times ۹ \times (۱۱۱۱۱)$ بر ۹ بخش پذیر است (چرا؟)؛ پس باقی مانده ۸ است. سایر باقی مانده‌ها هم که عبارت‌اند از ۷ ، ۵ ، ۶ ، ۳ ، ۲ ، ۳ ، ۴ (چرا؟) به طور مشابه به دست می‌آیند؛ بنابراین، برای تعیین باقی مانده، کافی است مجموع باقی مانده‌ها را بر ۹ تقسیم کنیم و باقی مانده را بیابیم.

$$۸ + ۷ + ۵ + ۶ + ۳ + ۲ + ۳ + ۴ = ۳۸$$

$$۳۸ = ۴ \times ۹ + ۲$$

پس باقی مانده‌ی تقسیم ۸۷۵۶۳۲۳۴ بر ۹ ، برابر ۲ است.

در مورد تعیین باقی مانده‌ی تقسیم حاصل ضرب چند عدد بر یک عدد، روش مشابهی به صورت زیر حدس زده می‌شود.

تعیین باقی مانده‌ی تقسیم حاصل ضرب چند عدد بر یک عدد

برای تعیین باقی مانده‌ی تقسیم حاصل ضرب چند عدد بر یک عدد، کافی است باقی مانده‌ی تقسیم هر یک از اعداد را بر آن عدد به دست آوریم و سپس، باقی مانده‌ی تقسیم حاصل ضرب باقی مانده‌ها را بر آن عدد محاسبه کنیم.

مسئله‌ی ۱: درستی این حدس را روی چند مثال بررسی کنید و اگر تأیید شد، سعی کنید در حالت کلی نیز آن را نشان دهید.

ممکن است تصور شود که روش تعیین باقی مانده در مورد حاصل ضرب چند عدد، کارایی چندانی ندارد. نمونه‌ی زیر نادرستی این تصور را نشان می‌دهد.

مثال: مانده‌ی تقسیم $۱۷^{۱۰۰}$ بر ۹ را بیابید.

در این جا حاصل ضرب شامل یکصدد عدد است که همگی با هم برابرند. کافی است باقی مانده‌ی هر کدام را بر ۹ بیابیم و سپس حاصل ضرب آن‌ها را در نظر بگیریم. باقی مانده‌ی ۱۷ بر ۹ ، برابر ۸ است؛ بنابراین مانده‌ی $۱۷^{۱۰۰}$ بر ۹ برابر مانده‌ی $۸^{۱۰۰}$ بر ۹ است اما می‌توان نوشت:

$$۸^{۱۰۰} = (۸^۲)^{۵۰} = ۶۴^{۵۰}$$

برای تعیین مانده‌ی تقسیم عدد ۶۴۵۰ بر ۹ ، کافی است مانده‌ی ۶۴ بر ۹ را تعیین کنیم و به توان ۵۰ برسانیم اما مانده‌ی ۶۴ بر ۹ برابر ۱ و ۱۵۰ برابر ۱ است. در نتیجه، مانده‌ی تقسیم $۱۷۱^{۱۰۰}$ بر ۹ برابر ۱ است.

مسئله‌ی ۲: الف) مانده‌ی تقسیم $۷۹۳۷^{۶۷} \times ۴۳۶۵^{۴۳}$ را بر ۸ بیابید.
ب) اگر $A = ۷۴^۹ + ۶۳^۸ + ۵۲^۷$ ، $A = ۴۱^۶$ ، مانده‌ی تقسیم A را بر ۵ بیابید. این مسئله را در کلاس حل کنید و راه‌حل‌ها را به بحث بگذارید.



مسئله‌ها

- اگر مقسوم و مقسوم علیه را در عددی صحیح ضرب کنیم، خارج قسمت و باقی مانده چه تغییری می‌کنند؟ برای ساده شدن کار، ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را پنج برابر کنید و وضعیت را بررسی نمایید. سپس حالت کلی را بررسی کنید.
- اگر به اندازه‌ی مقسوم علیه به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت و باقی مانده چه تغییری می‌کنند؟ اگر از مقسوم به اندازه‌ی مقسوم علیه کم کنیم، خارج قسمت و باقی مانده چگونه تغییر می‌کنند؟ اگر چند برابر مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت و باقی مانده چگونه تغییر می‌کنند؟
- مجموع دو عدد ۳۶۹۶ است. اگر عدد بزرگ‌تر را بر کوچک‌تر تقسیم کنیم، خارج قسمت ۲۰ و باقی مانده ۸۴ می‌شود. آن دو عدد را تعیین کنید.
- در یک عمل تقسیم، مقسوم علیه ۵۷ و باقی مانده ۱۸ است. چه قدر باید به مقسوم اضافه کنیم تا خارج قسمت یک واحد زیاد شود و باقی مانده برابر ۴۳ گردد؟
- در یک تقسیم، مقسوم علیه ۳۶ و باقی مانده ۱۵ است. می‌خواهیم عددی را به مقسوم اضافه کنیم؛ به طوری که خارج قسمت یک واحد زیاد شود. تعیین کنید این عدد در چه حدودی می‌تواند تغییر کند.
- باقی مانده‌ی $۱۱^{۲۵}$ را بر ۹ بیابید.
- رقم یکان $۳^{۲۷۳}$ را بیابید.

۸. ثابت کنید مجموع هر سه عدد متوالی، همواره بر ۳ بخش پذیر است.
۹. ثابت کنید مجموع هر پنج عدد متوالی، همواره بر ۵ بخش پذیر است.
- یک روش برای اثبات این که معادله‌ای جواب ندارد، این است که نشان دهیم از روی هر جواب آن معادله می‌توان جوابی اکیداً کوچک‌تر از آن جواب پیدا کرد. از آن‌جا که هر زیرمجموعه‌ای از عددهای طبیعی از پایین کران‌دار است، نتیجه این است که معادله هیچ جوابی ندارد!
۱۰. الف) جواب‌های طبیعی معادله $x^2 - 2y^2 = 0$ را بررسی کنید.
 ب) آیا می‌توانید نتیجه بگیرید که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است؟
۱۱. m و n دو عدد طبیعی هستند. هر طور که m کبوتر در n خانه قرار بگیرند، حداقل در یکی از خانه‌ها q کبوتر خواهد بود. نشان دهید خارج تقسیم m بر n برابر q است.
۱۲. الف) چند عدد صحیح و مثبت کم‌تر از ۱۰۰۰ وجود دارد که بر ۵ و ۷ بخش پذیر نیستند؟
 ب) چند عدد از این عددها بر ۳ هم بخش پذیر نیستند؟
۱۳. چند عدد صحیح و مثبت نایب‌تر از ده هزار ($x \leq 10,000$) وجود دارد که به ازای آن‌ها $2^x - x^2$ بر ۷ بخش پذیر نیست؟
۱۴. چند زوج متفاوت از عددهای صحیح x و y بین ۱ و ۱۰۰۰ وجود دارد که به ازای آن‌ها $x^2 + y^2$ بر ۴۹ بخش پذیر است؟ زوج‌های (x, y) و (y, x) را یکسان بگیرید.



۲-۲- بخش پذیری

بخش پذیری از مفاهیم ساده و اساسی در نظریه‌ی اعداد است که براساس آن، به شناخت ویژگی‌های اعداد صحیح و روابط بین آن‌ها دست می‌یابیم. ابتدا به یادآوری تعریف این مفهوم می‌پردازیم. هنگامی که ۱۸ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم، باقی‌مانده صفر می‌شود.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 18 \overline{) 54} \\ \underline{54} \\ 00 \end{array}$$

بنابراین، می‌توان تقسیم را به صورت $18 \div 3 = 6$ نوشت. به این ترتیب، می‌گوییم ۱۸ بر ۳ بخش پذیر است یا می‌گوییم ۳ عدد ۱۸ را می‌شمارد یا ۳ یک شمارنده‌ی ۱۸ است. گاهی وقت‌ها هم می‌گوییم ۱۸ مضرب ۳ است یا ۳ یک عامل ۱۸ است. در حالت کلی، برای سه عدد صحیح a و b و c ، اگر $a \div b = c$ ، آن‌گاه، عبارت‌های زیر همگی درست هستند:

— a بر b بخش پذیر است.

— b عدد a را می‌شمارد.

— b یک شمارنده‌ی a است.

— b یک عامل a است.

— a مضربی از b است.

— b عدد a را عاد می‌کند.

هر یک از عبارت‌های بالا را به صورت « $b \mid a$ » نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم: « b عدد a را می‌شمارد» یا « b عدد a را عاد می‌کند».

دقت کنید که چون تقسیم بر صفر تعریف شده نیست، در همه‌ی عبارت‌های قبل فرض بر این است که $b \neq 0$.

از این که $28 = 4 \times 7$ ، نتیجه می‌شود ۴ عدد ۲۸ را می‌شمارد یا $4 \mid 28$. از رابطه‌ی 4128 نتیجه می‌شود یک عدد صحیح $\frac{28}{4} = 7$ وجود دارد، طوری که $28 = 7 \times 4$. در حالتی که اعداد منفی هستند، وضعیت مشابه است. یکی از حالت‌ها را در نظر می‌گیریم.

از تساوی $-28 = (-4) \times 7$ ، نتیجه می‌شود $-4 \mid -28$ و برعکس، از رابطه‌ی $-41 - 28$ نتیجه می‌شود که عدد صحیح $\frac{-28}{-4} = 7$ وجود دارد؛ طوری که $-28 = (-4) \times 7$. عدد ۷ در این دو رابطه، منحصر به فرد است.

در حالت کلی، برای اعداد صحیح a و b و $c \neq 0$ داریم اگر $a = b \times c$ ، آن گاه $a \mid b$ ، و برعکس، اگر $a \mid b$ ، آن گاه عدد صحیح و منحصر به فرد c (که $c = \frac{a}{b}$) وجود دارد؛ طوری که $a = b \times c$.

در این جا دو حکم — که یکی برعکس دیگری است — بیان شد. این دو حکم در مورد رابطه‌ی بخش پذیری یا عاد کردن به طور هم زمان برقرار است. این ویژگی مبنای تعریف بعدی است که با به کارگیری عبارت «اگر و فقط اگر» رابطه‌ی عاد کردن را به صورت رسمی بیان می کند.

تعریف ۱: a و b دو عدد صحیح هستند و $b \neq 0$ ، عدد b عدد a را می شمارد، اگر و فقط اگر عدد صحیح و منحصر به فرد c موجود باشد که $a = c \times b$.

قبل از این که به ادامه‌ی مطالعه بپردازید، لحظاتی به این تعریف فکر کنید. اگر در درک آن ابهام دارید، سعی کنید بحث بخش پذیری را دوباره و با دقت بیش تر مطالعه کنید. سپس مثال بزنید و تعریف را روی مثال ها نظاره کنید! این کار در مورد هر تعریفی در ریاضیات، مؤثر و مفید است.

تعریف ها از پایه های اصلی هر نظریه ی ریاضی هستند. زمانی می توانید ادامه ی بحث را به صورت واقعی درک کنید که در تعریف هیچ ابهامی نداشته باشید. در این تعریف، دو عبارت «اگر و فقط اگر» و «منحصر به فرد» مهم هستند. می دانیم عدد ۲ یگانه عدد زوجی است که اول است و نمی توان عدد دیگری پیدا کرد که زوج باشد و اول هم باشد. به این ترتیب، می گویم عدد ۲ عددی زوج و اول است که منحصر به فرد یا یکتاست؛ بنابراین، منحصر به فرد، یگانه و یکتا سه کلمه ی معادل هستند.

عبارت «اگر و فقط اگر» اصطلاحی فنی تر است و باید بیش تر به آن دقت کرد. این عبارت، به رابطه ای دو طرفه اشاره دارد که یکی برعکس دیگری است. تعریف بالا را به بیان معادل دیگری می نویسیم تا معنای «اگر و تنها اگر» روشن شود. بیان زیر، معادل تعریف ۱ است.

«اگر عدد a عدد b را بشمارد، آن گاه عدد صحیح و منحصر به فرد c وجود دارد. به طوری که $a = c \times b$ ، و برعکس، اگر عدد صحیح و منحصر به فرد c باشد، طوری که $a = c \times b$ ، آن گاه b عدد a را می شمارد.»

مسئله ی ۱: در تعریف ۱ به جای عبارت «عدد a عدد b را می شمارد»، عبارت های معادل قرار دهید و تعریف ۱ را دوباره بنویسید. علاوه بر این، هر بار تعریف را به صورت معادل و بدون

به کارگیری عبارت «اگر و فقط اگر» بنویسید. بحث همگانی در مورد این تمرین، ابهام‌ها را آشکار می‌سازد و درکی عمیق ایجاد می‌کند.

تعریف ۱ را با چند عدد بررسی می‌کنیم:

فرض کنید $a = 36$ و $b = 9$ ؛ در این صورت، 36 بر 9 بخش پذیر است یا 9 عدد 36 را می‌شمارد. در نتیجه، عدد $c = 4$ وجود دارد؛ طوری که $36 = 4 \times 9$ و برعکس، چون $36 = 4 \times 9$ ، پس عدد 9 عدد 36 را می‌شمارد. در این مثال، عدد 4 منحصر به فرد است؛ یعنی، نمی‌توان عدد دیگری چون k که $k \neq 4$ است، پیدا کرد؛ طوری که $36 = k \times 9$. k حتماً باید 4 باشد.

لازم به یادآوری است که نباید $b \mid a$ را با $\frac{b}{a}$ که به معنی تقسیم b بر a است، اشتباه بگیریم. همچنین اگر b عدد a را بشمارد، می‌نویسیم $b \nmid a$. نماد $b \nmid a$ را بخوانید. b عدد a را عادی نمی‌کند یا b عدد a را نمی‌شمارد.

ویژگی‌های رابطه‌ی عادی کردن

رابطه‌ی عادی کردن ویژگی‌های جالبی دارد که بعضی از آن‌ها را مطالعه می‌کنیم.

حاصل جمع دو عدد که بر عدد دیگری بخش پذیرند.

اگر عدد a بر عدد d ، $(d \neq 0)$ بخش پذیر و عدد b نیز بر d بخش پذیر باشد، آن‌گاه $a + b$ بر d بخش پذیر است.

برای اثبات این خاصیت، از تعریف استفاده می‌کنیم. چون a بر d بخش پذیر است، پس عدد صحیح و یکتای c_1 وجود دارد که $a = c_1 d$ و چون b بر d بخش پذیر است، پس عدد صحیح و یکتای

$$c_2 \text{ وجود دارد که } b = c_2 d \text{؛ بنابراین:}$$

$$a + b = c_1 d + c_2 d$$

$$= (c_1 + c_2) d$$

قرار می‌دهیم $c_1 + c_2 = c_3$ ، آن‌گاه:

$$a + b = c_3 d$$

چون c_1 و c_2 منحصر به فرد بودند، عدد c_3 نیز منحصر به فرد خواهد بود؛ بنابراین، طبق

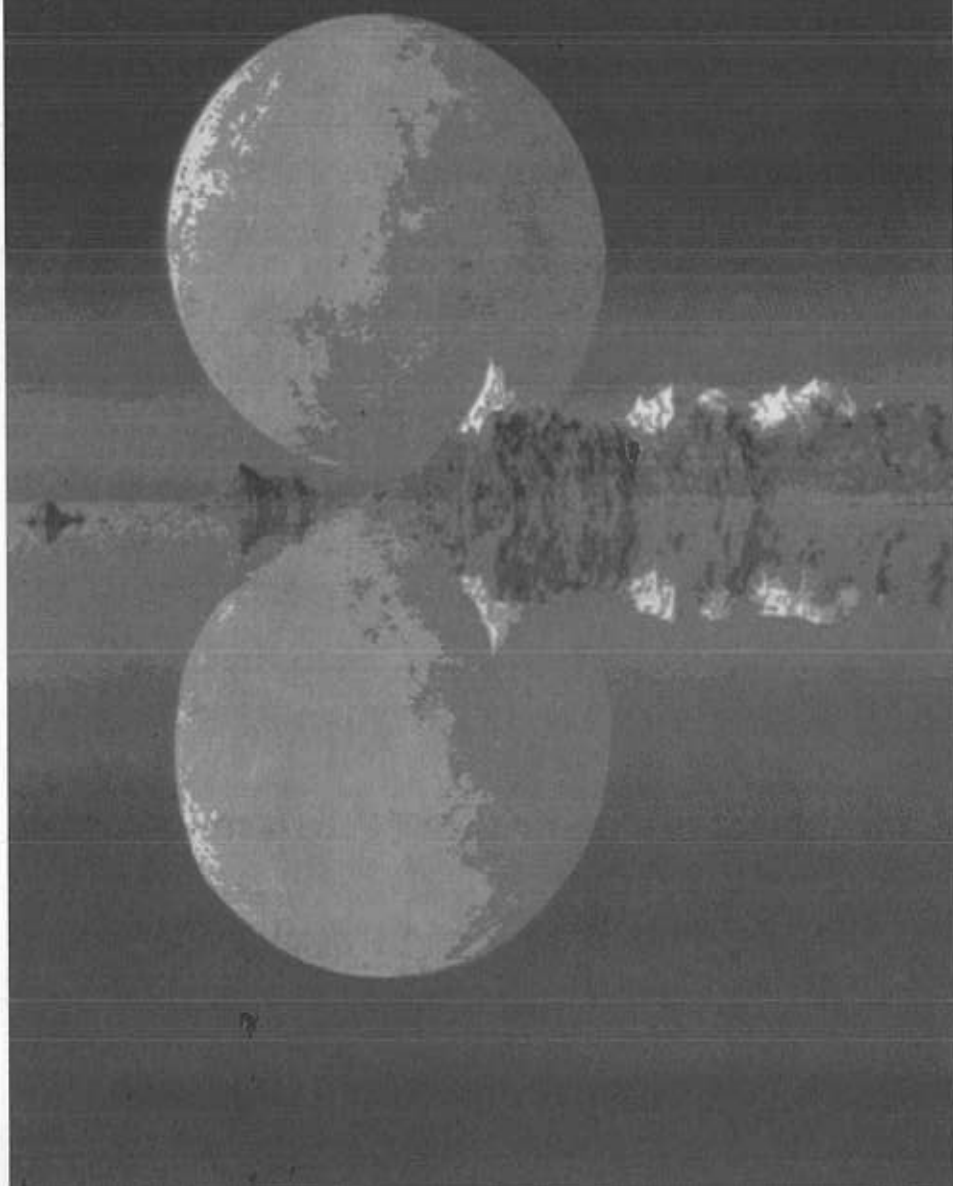
تعریف $a + b$ بر d بخش پذیر است.

این خاصیت را می‌توان با استفاده از نمادها به صورت زیر نوشت:

اگر $d \mid a$ و $d \mid b$ ، آن‌گاه $d \mid a + b$.

رواق منظر چشم من آشیانه ی توست

...



مسئله ۲: فرض کنید a, b, c, d اعداد صحیح هستند که $d \neq 0$ و n یک عدد طبیعی است.

الف) اگر $d \mid a$ و $d \mid b$ ، آن گاه $d \mid a - b$

ب) اگر $d \mid c$ ، آن گاه $d \mid c^n$.

از ترکیب ویژگی‌های رابطه‌ی « $\mid$ »، خواص جالب دیگری به دست می‌آید.

قاعده‌های بخش پذیری

سقراط: بگو ببینم، چه اعدادی بر ۲ بخش پذیرند؟

گلاوکن: اعداد زوج.

سقراط: اعداد زوج چه اعدادی هستند؟

گلاوکن: اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند.

سقراط: حواستان را جمع کنید؛ این یک دور است. به جای اول برگشتیم! من هنوز پاسخ

سؤال اول را نگرفته‌ام.

گلاوکن: اعدادی بر ۲ بخش پذیرند که باقی مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۲، صفر شود.

سقراط: این بهتر است. به تعریف بازگشتید اما انجام دادن تقسیم وقت زیادی می‌گیرد.

گلاوکن: من یاد گرفته‌ام که عددهایی که رقم یکان آن‌ها زوج است، بر ۲ بخش پذیرند.

سقراط: آیا دلیل آن را می‌دانید؟

گلاوکن: بیش‌تر از این‌ها نمی‌دانم.

ابتدا چند مثال را بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم که آیا عدد ۲۳۴ بر ۲ بخش پذیر است. یک

راه این است که تقسیم را انجام دهیم اما ما به دنبال چیز دیگری هستیم. می‌دانیم که ۲۳۴ یعنی ۴ تا

یکی، ۳ تا ده‌تایی و ۲ تا صدتایی؛ یعنی $234 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$. چون 10 بر ۲ بخش پذیر

است، پس 3×10 نیز بخش پذیر خواهد بود. همین‌طور $10^2 \times 2$ یا 10^2 نیز بر ۲ بخش پذیر است؛ در

نتیجه، 2×10^2 نیز بر ۲ بخش پذیر است؛ بنابراین، $2 \times 10^2 + 3 \times 10 + 4$ نیز بر ۲ بخش پذیر است. پس

با توجه به خاصیت‌های بخش پذیری، کافی است رقم یکان بر ۲ بخش پذیر باشد.

بخش پذیری عدد ۳۷۹۶ بر ۲ را با همین روش بررسی می‌کنیم. بسط ده‌دهی (در پایه‌ی ۱۰)

عدد ۳۷۹۶ به صورت زیر است:

$$3796 = 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 9 \times 10 + 6$$

مطابق استدلال بالا، جمله‌هایی که توان‌های ۱۰ در آن‌ها ظاهر شده است، همگی بر ۲ بخش پذیرند؛

تنها کافی است رقم یکان آن‌ها بر ۲ بخش پذیر باشد. اکنون واضح است که هر عددی را با بسط

ده‌دهی بنویسیم، به‌جز رقم یکان، بقیه‌ی جمله‌ها عامل 10^0 را دارند و لذا مجموع آن‌ها بر ۲ بخش پذیر است. برای بخش پذیری بر ۲ کافی است رقم یکان عدد را آزمایش کنیم. بنابراین:

«عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم یکان آن زوج باشد.»

مسئله‌ی ۳: قاعده‌ی بخش پذیری بر ۵ را با الگو گرفتن از بخش پذیری بر ۲ به‌دست آورید. با الهام گرفتن از مسیر رسیدن به قاعده‌ی بخش پذیری بر ۲، به بخش پذیری بر ۴ می‌پردازیم. کار خود را با چند مثال ساده شروع می‌کنیم.

عدد ۵۳۸ را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم آن را بر ۴ تقسیم کنیم و بینیم آیا باقی‌مانده صفر می‌شود یا نه، ولی سعی می‌کنیم از راه بررسی بسط دهدهی ۵۳۸ شروع کنیم.

$$538 = 5 \times 100 + 3 \times 10 + 8$$

هر کدام از جمله‌ها بر ۴ بخش پذیر باشند، مجموع آن‌ها نیز بر ۴ بخش پذیر است. چرا؟ ۸ بر ۴ بخش پذیر است ولی 10^0 نیست. 3×10 هم بر ۴ بخش پذیر نیست، 100 بر ۴ بخش پذیر است: $25 = 100 \div 4$. روشن است که 5×100 هم بر ۴ بخش پذیر است؛ بنابراین، مجموع - یعنی ۵۳۸ - بر ۴ بخش پذیر نیست. ظاهراً از آزمایش اول چیزی به‌دست نیامد. نه، این‌طور نیست. چون 100 بر ۴ بخش پذیر است، هر عددی که مضرب 100 باشد بر ۴ بخش پذیر است؛ یعنی: 10000 ، 1000 و ... یا 10^3 ، 10^4 ، ... همگی بر ۴ بخش پذیرند. به این ترتیب، نتیجه‌ای عالی به‌دست آمد. در بسط دهدهی یک عدد، جمله‌های صدگان، هزارگان، ده‌هزارگان و ... همگی بر ۴ بخش پذیرند و مجموع آن‌ها نیز بر ۴ بخش پذیر خواهد بود! نتیجه‌ی اولین مثال غیرمنتظره است. به بیان دیگر، بخش پذیری بر ۴ فقط به رقم یکان و دهگان بستگی دارد. در حالت کلی، اگر $\overline{abc}$ یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه:

$$\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + c$$

چون مضرب‌های 100 بر ۴ بخش پذیرند، کافی است $b \times 10 + c$ بر ۴ بخش پذیر باشد؛ بنابراین:

«عددی بر ۴ بخش پذیر است که عدد حاصل از دو رقم یکان و دهگان آن بر ۴ بخش پذیر باشد.»

مسئله‌ی ۴: با توجه به الگوهای به‌دست آمده برای بخش پذیری اعداد بر ۲، ۵ و ۴، قاعده‌ی بخش پذیری بر ۲۵ را پیدا کنید.

۱- وقتی عددی را با حروف می‌نویسیم، پاره‌خطی را بالای آن قرار می‌دهیم؛ به این معنی که هر حرف یک رقم و همه‌ی آن‌ها یک عدد هستند.

مسئله ۵: الگوهای قبلی را در نظر بگیرید و قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۸ و ۱۲۵ را به دست آورید. راه حل‌ها را به بحث بگذارید.

مسئله ۶: الگوی دست‌پایی به قاعده‌های بخش‌پذیری بر ۲ و ۴ و ۸ را با ۵ و ۲۵ و ۱۲۵ مقایسه کنید.

بخش‌پذیری بر ۳ و ۹

به طور طبیعی مشابه روند گذشته، برای بررسی بخش‌پذیری بر ۳، عددی را انتخاب می‌کنیم و بسط دهدهی آن را می‌نویسیم. عدد ۵۷۲۴ را در نظر می‌گیریم.

$$5724 = 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 4$$

۱۰ بر ۳ بخش‌پذیر نیست، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ هم بخش‌پذیر نیستند؛ پس چیزی به دست نمی‌آید. در موارد قبلی، از بخش‌پذیر بودن ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ ... استفاده می‌کردیم و بخش‌پذیری به ارقام یکان و دهگان مربوط می‌شد. نباید انتظار داشته باشیم که یک الگو همه جا کار کند. البته ناامید هم نباید بشویم. شاید بتوان از کارهای قبلی نتایجی گرفت. یک بار دیگر آن‌ها را مرور می‌کنیم.

یکی از فکری که کمی پنهان است ولی از آن استفاده کردیم، این بود که وقتی بسط دهدهی یک عدد را می‌نوشتیم، بخش‌پذیری هر جمله را جداگانه بررسی می‌کردیم و اگر همه‌ی جمله‌ها بخش‌پذیر بودند، آن‌گاه آن عدد هم بخش‌پذیر می‌شد. این فکر را به آزمایش می‌گذاریم.

اگر ۱۰ را بر ۳ تقسیم کنیم باقی‌مانده ۱ می‌شود. ۱۰۰ هم همین‌طور، ۱۰۰۰ را تقسیم می‌کنیم، باز هم باقی‌مانده ۱ می‌شود! کمی غیرعادی است. نکته این جاست که وقتی از اعداد ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ... یک واحد کم کنیم، ۹، ۹۹، ۹۹۹ و ... به دست می‌آید. این اعداد همگی مضرب ۳ هستند!

$$5724 = 5 \times 1000 + 7 \times 100 + 2 \times 10 + 4$$

$$= 5 \times (999 + 1) + 7 \times (99 + 1) + 2(9 + 1) + 4$$

$$= 5 \times 999 + 5 \times 1 + 7 \times 99 + 7 \times 1 + 2 \times 9 + 2 \times 1 + 4$$

$$= (5 \times 999 + 7 \times 99 + 2 \times 9) + (5 + 7 + 2 + 4)$$

مجموع کمانک (پراتز) اول بر ۳ بخش‌پذیر است (چرا؟). پس کافی است مجموع کمانک دوم

$$5 + 7 + 2 + 4 = 18$$

هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

بله، ۱۸ بر ۳ بخش‌پذیر است و در نتیجه، ۵۷۲۴ بر ۳ بخش‌پذیر است. نتیجه‌ی با ارزشی که از بررسی این مثال به دست می‌آید، این است که بخش‌پذیری عدد ۵۷۲۴ بر ۳ فقط به بخش‌پذیری $(5 + 7 + 2 + 4)$ بر ۳ بستگی دارد اما نکته‌ی جالب این است که ۴ و ۲ و ۷ و ۵ همان رقم‌های ۵۷۲۴

هستند. این وضعیت در حالت کلی درست است و این روش یافتن قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۳ است.
«عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد.»

مسئله‌ی ۷: با الهام گرفتن از الگوی بخش‌پذیری بر ۳، چگونگی قاعده‌ی بخش‌پذیری بر ۹ را بررسی کنید.

برای بررسی بخش‌پذیری بر ۶، کافی است توجه کنیم که $6 = 2 \times 3$ ؛ بنابراین، هر عددی که بر ۶ بخش‌پذیر باشد، هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر خواهد بود. از طرف دیگر، اگر عددی بر ۲ و بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه بر 2×3 نیز بخش‌پذیر است. این حکم را در قسمت بعدی ثابت می‌کنیم، بنابراین: «عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که هم بر ۲ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد».

برای مثال، عدد ۳۷۲ را در نظر می‌گیریم. چون رقم یکان آن زوج است، پس بر ۲ بخش‌پذیر است و مجموع ارقام آن $3 + 7 + 2 = 12$ نیز بر ۳ بخش‌پذیر است. در نتیجه ۳۷۲ بر ۳ هم بخش‌پذیر است؛ بنابراین، عدد ۳۷۲ بر ۶ بخش‌پذیر است.



بخش پذیری بر ۷

با به دست آوردن قانونی برای بخش پذیری بر ۷، دستورالعمل هایی برای بخش پذیری اعداد بر عددهای ۱ تا ۱۰ در دست داریم. بخش پذیری بر ۷ اندکی متفاوت است. یادآوری می کنیم اگر در یک تقسیم، مضرب هایی از مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم، باقی مانده تغییری نمی کند؛ برای مثال، باقی مانده ی دو عدد ۵۷۳۲ و $5732 + 21k$ بر ۷ برابر است؛ زیرا ۲۱ مضرب ۷ است. بنابراین، $21k$ نیز مضرب ۷ است (k یک عدد طبیعی) و باقی مانده ی آن صفر است. پس باقی مانده ی مجموع، همان باقی مانده ی ۵۷۳۲ بر ۷ است.

عدد سه رقمی $\overline{abc}$ را در نظر می گیریم و بسط دهدهی آن را می نویسیم:

$$\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + c$$

چون $c = 21c - 20c$ ، داریم:

$$\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + 21c - 20c$$

$$= 21c + 10(a + b - 2c)$$

$21c$ بر ۷ بخش پذیر است و چون 10 بر ۷ بخش پذیر نیست، برای بخش پذیری $\overline{abc}$ بر ۷ کافی است داخل کمانک یعنی $-10a + b - 2c$ بر ۷ بخش پذیر باشد. یعنی رقم یکان عدد $\overline{abc}$ را حذف می کنیم و عدد حاصل از بقیه ی ارقام را منهای دو برابر رقم یکان می کنیم. سپس بخش پذیری آن را بر ۷ بررسی می کنیم. با این روش، بخش پذیری یک عدد سه رقمی بر ۷ به بخش پذیری یک عدد دو رقمی بر ۷ تبدیل می شود. به عنوان نمونه:

$$462: \quad 46 - 2 \times 2 = 42$$

و ۴۲ بر ۷ بخش پذیر است.

اگر عدد چهار رقمی باشد - یعنی $\overline{abcd}$ - مانند حالت سه رقمی عمل می کنیم.

$$\overline{abcd} = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$$

$$= a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + 21d - 20d$$

$$= 21d + 10(100a + 10b + c - 2d)$$

$21d$ بر ۷ بخش پذیر است. چون 10 بر ۷ بخش پذیر نیست، کافی است داخل کمانک بخش پذیر باشد؛ یعنی، از عدد چهار رقمی، رقم یکان را حذف می کنیم. عدد حاصل از سه رقم بعدی را منهای دو برابر رقم یکان می کنیم.

$$4623: \quad 462 - 2 \times 3 = 456$$

این دستورالعمل را دوباره برای عدد سه رقمی ۴۵۶ به کار می بریم.

$$456: \quad 45 - 2 \times 6 = 33$$

۳۳ بر ۷ بخش پذیر نیست و در نتیجه، عدد ۴۶۲۳ بر ۷ بخش پذیر نخواهد بود؛ بنابراین، دستورالعمل بخش پذیری بر ۷ را می توان به این صورت بیان کرد:

«برای تعیین بخش پذیری بر ۷، رقم یکان عدد را حذف می کنیم و عدد حاصل از بقیه ی رقم ها را منهای دو برابر رقم یکان می کنیم. این عمل را تکرار می کنیم تا به یک عدد دو رقمی برسیم. بخش پذیری این عدد بر ۷، معادل بخش پذیری عدد اولیه بر ۷ است.»

بخش پذیری بر ۱۱

برای قضیه ی تقسیم، صورت دیگری هم وجود دارد که برای بررسی بخش پذیری یک عدد بر ۱۱ بسیار مفید است.

صورت دیگر قضیه ی تقسیم

برای دو عدد صحیح a و b ، که $b \neq 0$ ، اعداد صحیح q و r وجود دارند، به طوری که:

$$a = qb + r, \quad r < |b|$$

تفاوت این قضیه با شکل قبلی، در شرط باقی مانده است. رابطه ی $r < |b|$ معادل با رابطه ی $-b < r < b$ است؛ یعنی، باقی مانده می تواند منفی هم باشد؛ به شرط این که از $-b$ کم تر نباشد. در این حالت باقی مانده و خارج قسمت منحصر به فرد نیستند. برای نمونه، اگر $a = 10$ و $b = 11$ ، آن گاه:

$$\begin{array}{l} 10 \div 11 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}, \quad 10 = 0 \times 11 + 10, \quad 10 < 11 \qquad \begin{array}{l} 10 \div 11 \\ \underline{-11} \\ -1 \end{array}, \quad 10 = 1 \times 11 - 1, \quad -11 < -1 < 11$$

بنابراین، عدد ۱۰ - یک باقی مانده ی تقسیم ۱۱ بر ۱۰ است که در شرط قضیه صدق می کند. پس باقی مانده ی تقسیم $10 \times 10 = 100$ بر ۱۱، برابر $1 \times 11 = 11$ است. ابتدا باقی مانده ی هر یک از اعداد حاصل ضرب را به دست می آوریم و درهم ضرب می کنیم. اگر این حاصل ضرب از مقسوم علیه کوچک تر نباشد، آن را نیز بر مقسوم علیه تقسیم می کنیم. در نتیجه، باقی مانده ی $1000 = 10^3$ بر ۱۱ برابر $(-1)^3$ است و به همین ترتیب.

مسئله ی ۸: برای بخش پذیری بر ۱۱، دستورالعملی براساس ارقام بیابید. چند مثال را بررسی کنید و سپس حالت کلی را جست و جو نمایید.



مسئله‌ها

۱. برای اعداد صحیح a و b و $d \neq 0$ ، ثابت کنید :
 الف) اگر $d|a$ و $a|b$ ، آن‌گاه $d|(a+b)$.
 ب) اگر $d|a$ و $d|b$ ، آن‌گاه $d|(a+b)$.
۲. برای هر دو عدد صحیح a و $d \neq 0$ ، اگر $d|a$ و k هر عدد صحیحی باشد، ثابت کنید $d|ka$.
۳. کدام یک از عبارات‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ چرا؟
 الف) اگر $3|x$ و $3|y$ ، آن‌گاه $3|xy$.
 ب) اگر $3|(x+y)$ ، آن‌گاه $3|x$ و $3|y$.
 پ) اگر $a|a$ ، آن‌گاه $3|a$.
۴. بخش‌پذیری هر یک از اعداد زیر را بر $2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11$ و 11 بررسی کنید.
 $183324, 901815, 4201012, 4074, 4907, 123123$
۵. در هر عدد صحیح، اگر یک رقم (به‌جز 0) سه بار تکرار شده باشد، بر 3 بخش‌پذیر است؛ مثلاً $111, 555, 222$ یا 414313134 . چرا این مطلب درست است؟
۶. اگر عددی را از مقلوبش کم کنیم (مثلاً 3512 مقلوب 2153 است)، بر 9 بخش‌پذیر است. چرا؟
۷. آیا می‌توانید برای بخش‌پذیری بر عدد دلخواه n ، قاعده‌ای به‌دست آورید؟
۸. عدد داده‌شده را به‌شکل $A = 10^n a_n + \dots + 10^1 a_1 + a_0$ نمایش می‌دهیم. از روی A عدد A_1 را این‌طور تعریف می‌کنیم :

$$A_1 = D(A) = a_n + 2a_{n-1} + 2^2 a_{n-2} + \dots + 2^{n-1} a_1 + 2^n a_0$$

 این عمل را تکرار می‌کنیم : $A_2 = D(A_1)$ و $A_3 = D(A_2)$ و ...
 الف) نشان دهید دنباله‌ی بالا برای هر عدد طبیعی A به عددی $2^k < A_k$ منجر می‌شود که $D(A_k) = A_k$.
 ب) اگر $A = 19^{85}$ ، دنباله‌ی بالا به چه عددی منجر می‌شود؟
۹. در مورد جواب‌های صحیح و مثبت x و y و z از معادله‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ تحقیق کنید برای معادله‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n xyz$ با $n \geq 1$ ؛ جواب‌های صحیح و مثبت را نیز مورد بررسی قرار دهید.

رسید مژده که آمد بهار و سبزه دمید

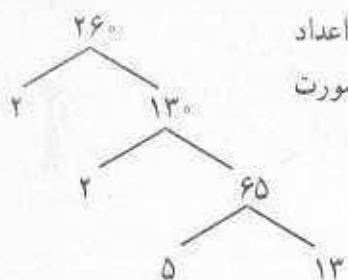


۲-۳- اعداد اول

بررسی در مورد بخش پذیری اعداد، به شناسایی الگوهای خاصی از اعداد منتهی شده است. اعدادی نظیر ۷ و ۱۳ فقط دو شمارنده یا عامل متمایز دارند؛ یکی عدد ۱ و دیگری خودشان ولی عددهایی نظیر ۶، ۲۸ شمارنده‌هایی به جز ۱ و خودشان دارند. ۱، ۲، ۳، ۴ و ۶ همگی عدد ۶ را می‌شمارند و عددهای ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۴ و ۲۸ عامل‌های ۲۸ هستند. این خاصیت به تعریف‌های زیر منجر می‌شود.

تعریف: هر عدد صحیح و مثبت که دقیقاً دو شمارنده (عامل) ی متمایز داشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود.

تعریف: هر عدد صحیح و مثبت که به غیر از ۱ و خودش شمارنده‌ی دیگری داشته باشد، عدد مرکب نامیده می‌شود.



اعداد مرکب را می‌توان به صورت حاصل ضرب اعداد اول تجزیه کرد. عدد ۲۶۰ را با نمایش درختی به صورت روبه‌رو تجزیه می‌کنیم.

بنابراین، $260 = 2^2 \times 5 \times 13$. تجزیه‌ی هر عدد به عامل‌های (شمارنده‌های) اول به صورت یکتا صورت می‌پذیرد. این ویژگی بسیار مهم است؛ زیرا عامل‌های اول تشکیل‌دهنده‌ی عدد را مشخص می‌کنند. در واقع، کوچک‌ترین عامل‌هایی که ساختمان یک عدد را به وجود می‌آورند، شناخته می‌شوند. این ویژگی مهم، به قضیه‌ی اساسی حساب معروف است.

قضیه‌ی اساسی حساب: هر عدد صحیح به صورت یکتا، به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌شود.

با توجه به قضیه‌ی اساسی حساب هر عدد دلخواه، N را می‌توان به صورت

$$N = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

نوشت. در این نمایش $p_1, p_2, p_3, \dots$ و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ عامل‌های اول

متمايز و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و ... اعداد طبيعي هستند.

مسئله ۱: نمایش تجزیه‌ی یکتا به عامل‌های اول اعداد زیر را پیدا کنید.

۱۰۵۳۰، ۲۵۲۰، ۳۶۰۰، ۱۲۶۰

مسئله ۲: وقتی عددی بر یک عدد دیگر بخش‌پذیر است، چه رابطه‌ای بین تجزیه‌ی یکتا به عامل‌های اول آن دو عدد وجود دارد؟

مسئله ۳: وقتی عددی بر یک عدد دیگر بخش‌پذیر نباشد، چه رابطه‌ای بین تجزیه‌ی یکتا به عامل‌های اول آن دو عدد وجود دارد؟

در مورد دو مسئله‌ی اخیر، اعدادی ساده در نظر بگیرید و با تنظیم جدول نظام‌دار، برای یافتن یک الگوی کلی تلاش کنید.

تشخیص اول بودن یک عدد

از گذشته‌های دور تاکنون تلاش‌های بسیاری برای پیدا کردن روش‌های شناخت اعداد اول صورت گرفته است. در این جا، بدون این که به‌طور مستقیم به مطالعه‌ی این روش‌ها بپردازیم، می‌کوشیم آن‌ها را دوباره کشف کنیم.

اول بودن!

اول بودن عدد ۳۷ را بررسی کنید. سپس به دنبال یافتن الگویی برای شناخت اعداد اول باشید. فراموش نکنید قبل از مطالعه‌ی بررسی‌ها، روی مسئله کار کنید. راهبرد تنظیم جدول نظام‌دار و الگویابی را فراموش نکنید.

هادی، محمود و حمید که به نظریه‌ی اعداد و به‌خصوص اعداد اول بسیار علاقه‌مند شده بودند، این مسئله را جداگانه حل کردند. هادی راه حل خود را این گونه شرح می‌دهد:

من از تعریف عدد اول می‌دانستم که اگر ۳۷ اول باشد، به غیر از خودش و عدد ۱ بر عدد دیگری بخش‌پذیر نیست؛ بنابراین، از ۲ شروع کردم و تقسیم ۳۷ بر ۲ را انجام دادم تا ببینم باقی‌مانده صفر می‌شود یا نه. بعد بر ۳ و ۴ و ... تا ۳۶ تقسیم را انجام دادم.

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 2} \\ 2 \\ \hline 17 \\ 16 \\ \hline 1 \end{array}$$

و

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 3} \\ 3 \\ \hline 07 \\ 6 \\ \hline 1 \end{array}$$

و

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 4} \\ 4 \\ \hline 36 \\ 01 \end{array}$$

و

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 36} \\ 36 \\ \hline 01 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 1} \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

آن را هم حذف کردم.

۴- عدد بعدی ۷ بود.

در این مرحله، الگویی به نظر می رسید:

برای تشخیص اول بودن یک عدد، کافی است بخش پذیری آن را بر اعداد اول کوچک تر از خودش بیازماییم.

حمید گفت: روش محمود خیلی جالب است ولی با روش من تفاوت دارد. در واقع، روش کار من شبیه روش کار هادی است ولی خیلی کوتاه تر!

سپس، حمید راه حل خود را این گونه توضیح داد:

من برای تعیین بخش پذیری ۳۷ تقسیم های زیر را انجام دادم:

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 2} \\ 18 \\ \hline 3 \\ 17 \\ \hline 16 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 3} \\ 12 \\ \hline 3 \\ 7 \\ \hline 6 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 4} \\ 9 \\ \hline 36 \\ \hline 01 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 5} \\ 7 \\ \hline 35 \\ \hline 02 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 6} \\ 6 \\ \hline 36 \\ \hline 01 \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \overline{) 7} \\ 5 \\ \hline 35 \\ \hline 02 \end{array}$$

در این جا نکته ی جالبی به ذهنم رسید. وقتی تقسیم ۳۷ بر ۶ را انجام دادم، خارج قسمت ۶ شد و وقتی تقسیم ۳۷ بر ۷ و ۸ را انجام دادم، خارج قسمت کوچک تر شد. می دانستم که وقتی مقسوم علیه زیاد شود، خارج قسمت کم می شود؛ بنابراین، خارج قسمت های بعدی می توانند ۳ و ۴ باشند. در این جا نکته ی جالب دیگری را هم فهمیدم و آن این بود که اگر در تقسیم های بعدی باقی مانده صفر شود، آن گاه هم مقسوم علیه و هم خارج قسمت هر دو عامل های ۳۷ خواهند بود. در صورتی که من قبلاً ۳۷ را به ۴ و ۳ و ۲ تقسیم کرده بودم و باقی مانده صفر نشده بود. پس، نتیجه گرفتم که لازم نیست تقسیم ها را ادامه بدهم و ۳۷ عددی اول خواهد بود.

پس از ارائه ی این سه راه حل در کلاس، مهدی نکته ی بسیار جالبی را مطرح کرد. او گفت: من فکر می کنم راه حل حمید می تواند کوتاه تر هم بشود؛ زیرا وقتی ۳۷ بر ۲ بخش پذیر نباشد، بر ۴ و ۶ هم نخواهد بود؛ بنابراین، تقسیم ۳۷ بر ۴ و ۶ لازم نیست. فقط کافی است بخش پذیری بر اعداد اول را آزمایش کنیم؛ یعنی، با انجام دادن سه تقسیم می توان فهمید که ۳۷ اول است یا خیر.

فکر اصلی تشخیص اول بودن یک عدد، در این سه راه حل ارائه شد. در واقع، برای تشخیص اول بودن عدد n ، کافی است بخش پذیری n را بر همه ی اعداد اولی که مربع آن ها کم تر از n است، بررسی کنیم. نتیجه های زیر این روش را به طور رسمی بیان می کنند.

نتیجه‌ی ۱: اگر d یک عامل n باشد، که $n \neq 0$ و $d \neq 0$ ، آن‌گاه $\frac{n}{d}$ نیز یک عامل n است.

البته گاهی ممکن است این عامل، عدد جدیدی نباشد؛ مثلاً 7 یک عامل 49 است و $\frac{49}{7}$ مجدداً، 7 را نتیجه می‌کند.

فرض کنید p کوچک‌ترین عامل اول یک عدد n باشد. اگر n اول باشد که $p = n$ ، ولی اگر مرکب باشد، داریم $p \leq \frac{n}{p}$ ؛ زیرا $\frac{n}{p}$ نیز یک عامل عدد n است و p کوچک‌ترین عامل اول آن بوده است. به این ترتیب، داریم $p^2 \leq n$. نتیجه‌ی زیر در این رابطه است.

نتیجه‌ی ۲: اگر n یک عدد مرکب باشد، دارای یک عامل اول p است که $p^2 \leq n$.
 حال می‌خواهیم ببینیم یک عدد - مثلاً 109 - عددی اول است یا نه. اگر 109 عددی مرکب باشد، باید یک عامل اول p داشته باشد که $p^2 \leq 109$. اعداد اولی که مربع آن‌ها از 109 بزرگ‌تر نیست، عبارت‌اند از: $2, 3, 5, 7$ ولی داریم $2 \nmid 109, 3 \nmid 109, 5 \nmid 109$ و $7 \nmid 109$. پس، 109 اول است. این ملاحظه را در نتیجه‌ی زیر به‌طور کلی ذکر می‌کنیم.



هر عدد اول شخصیتی منحصر به فرد دارد.

نتیجه‌ی ۳: اگر $n \geq 2$ بر هیچ عدد اول p که $p^2 \leq n$ بخش پذیر نباشد، آن گاه n یک عدد اول است.

مثال: ۳۹۷ اول است یا مرکب؟

اعداد اول p که $p^2 \leq 397$ عبارت‌اند از: ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۱۹. چون $397 \div 2 = 198 \text{ باقی } 1$ ، $397 \div 3 = 132 \text{ باقی } 1$ ، $397 \div 5 = 79 \text{ باقی } 2$ ، $397 \div 7 = 56 \text{ باقی } 5$ ، $397 \div 11 = 36 \text{ باقی } 1$ ، $397 \div 13 = 30 \text{ باقی } 7$ ، $397 \div 17 = 23 \text{ باقی } 8$ و $397 \div 19 = 20 \text{ باقی } 17$ پس ۳۹۷ عددی اول است.

غریبال اراتستن

اراتستن، ریاضی‌دان یونان باستان، که در قرن دوم و سوم قبل از میلاد می‌زیست، روش زیر را برای تعیین اعداد اول — مثلاً کم‌تر از ۵۰ — تدوین کرد. این روش به غریبال اراتستن معروف است.

اعداد از ۱ تا ۵۰ را در نظر می‌گیریم و با اجرای گام‌های زیر، اعداد اول را به‌دست می‌آوریم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰

- گام ۱. عدد ۱ را خط می‌زنیم (۱ اول نیست)؛
- گام ۲. دور عدد ۲ دایره‌ای کوچک می‌کشیم (۲ اول است)؛
- گام ۳. سایر مضرب‌های ۲ را خط می‌زنیم؛
- گام ۴. دور عدد ۳ دایره‌ای کوچک می‌کشیم (۳ اول است)؛
- گام ۵. سایر مضرب‌های ۳ را خط می‌زنیم؛
- گام ۶. دور ۵ و ۷ خط می‌کشیم و سایر مضرب‌های آن‌ها را حذف می‌کنیم؛
- گام ۷. اعداد باقی‌مانده، اعداد اول کوچک‌تر از ۵۰ هستند؛

ریاضی دانان قرن ها تلاش می کردند که دستوری برای تولید اعداد اول بیابند. در یکی از این کوشش ها، دستور $n^2 - n + 41$ عرضه شد.

مسئله ۴: بررسی کنید آیا $n^2 - n + 41$ به ازای هر عدد صحیح و نامنفی n یک عدد اول تولید می کند یا خیر.

راهبرد تنظیم جدول را به کار بگیرید.

مارتین مرسن، ریاضی دان فرانسوی، دستور $2^n - 1$ را پیشنهاد کرد. اعداد اولی را که از این فرمول به دست می آیند، اعداد اول مرسن می نامند.

مسئله ۵: بررسی کنید به ازای کدام n ها، دستور $2^n - 1$ یک عدد اول تولید می کند. تنظیم جدول را فراموش نکنید.

بعضی از اعداد اول بزرگ که از دستور مرسن شناخته شده اند، به ازای

$$n = 110503, 132049, 216091, 756839, 859433$$

محاسبه می شوند. اعداد اولی که به ازای این اعداد به دست می آیند، به ده ها هزار رقم بالغ می شوند! مسئله دیگری که از قرن های دور مورد توجه ریاضی دانان بوده، این است که آیا تعداد اعداد اول نیز نامتناهی است. این سؤال از این رو مهم تلقی می شود که اعداد اول از نظم خاصی پیروی نمی کنند. اقلیدس، ریاضی دان معروف یونان باستان، برای نخستین بار نامتناهی بودن اعداد اول را نشان داد.



مسئله ها

۱. با نمایش درختی، اعداد زیر را به حاصل ضرب اعداد اول تجزیه کنید.

الف) ۳۰۸ ب) ۳۴۷۵ پ) ۲۳۷۵۰

۲. اول بودن اعداد زیر را بررسی کنید.

الف) ۱۲۳ ب) ۹۲۳ پ) ۴۳۳ ت) ۵۶۶۹

۳. غربال اراتستن را تا ۲۰۰ ادامه دهید.

۴. عدد صحیح و مثبت n را در صورتی تام گویند که اگر با مجموع مقسوم علیه هایش (به جز

خودش) برابر باشد؛ مثلاً $6 = 1 + 2 + 3$ نام است. نشان دهید که ۲۸، ۴۹۶ و ۸۱۲۸ نیز نام هستند.
 ۵. دو عدد صحیح و مثبت را در صورتی دو عدد متحابه می‌نامیم که مجموع مقسوم‌علیه‌های
 هر یک (به‌جز خود آن عدد) برابر عدد دیگر باشد. نشان دهید 220 و 284 دو عدد متحابه‌اند. دو عدد
 متحابه‌ی دیگر پیدا کنید (از راه حدس و آزمایش).

۶. الف) آیا از $ab \mid 3$ لزوماً نتیجه می‌شود که $a \mid 3$ و $b \mid 3$ ؟

ب) آیا از $ab \mid 4$ نتیجه می‌شود که $a \mid 4$ و $b \mid 4$ ؟

۷. یک عدد مرکب - به غیر از 41^2 - پیدا کنید که به‌صورت $n^2 - n + 41$ باشد.

۸. در عبارت $n^2 + n + 17$ با جاگذاری n با $1, 2, 3, \dots, 17$ تعیین کنید کدام یک از
 اعداد حاصل، اول و کدام یک مرکب است.

۹. ثابت کنید تعداد اعداد اول نامتناهی است.

۱۰. آیا می‌توان یک چندجمله‌ای به‌شکل $a_n x^n + \dots + a_1 x + a$ با ضرایب صحیح به‌دست
 آورد که برای تمام مقادیر طبیعی x حاصل آن یک عدد اول باشد؟

۱۱. الف) قضیه‌ی کوچک فرما: اگر p یک عدد اول باشد و a عدد طبیعی دلخواه، $a^p - a$
 بر p بخش‌پذیر است.

ب) اگر n اول باشد، $2^n - 2$ ولی عکس آن صحیح نیست. ($n = 341$) نشان دهید بی‌نهایت
 عدد مرکب n وجود دارد که $2^n - 2 \mid n$.

۱۲. بدون هیچ راهنمایی می‌توانید کشف کنید! البته زحمت دارد!

الف) عدد طبیعی $n = 2^k$ را در نظر بگیرید. چند مقسوم‌علیه دارد؟ 1 و n را هم به‌حساب
 آورید. آیا الگویی وجود دارد؟

ب) عدد طبیعی $n = 10^k$ را در نظر بگیرید. چند مقسوم‌علیه دارد؟ 1 و n را هم بشمارید. آیا
 الگویی وجود دارد؟ آیا با عامل‌های اول مربوط است؟

پ) براساس الف و ب، درباره‌ی تعداد مقسوم‌علیه‌های یک عدد حدسی بزنید.

ت) عدد طبیعی و دلخواه n را در نظر بگیرید و در مورد تعداد مقسوم‌علیه‌های آن تحقیق کنید.
 سعی کنید حدسی بزنید. اگر پیشرفت شما خوب بود، بکوشید برای حالت کلی استدلالی ارائه کنید.
 اگر کارتان پیش نمی‌رود، مطمئن باشید که از راهبردها به‌درستی استفاده نکرده‌اید!

۱۳. در یکی از روش‌های مهم رمزنگاری از اعداد بسیار بسیار بزرگ اول استفاده می‌کنند!
 فکر می‌کنید چگونه می‌توان یک عدد اول خیلی بزرگ پیدا کرد؟ این سؤال را در کلاس به بحث
 بگذارید.



آخرین قضیه‌ی فرما

با تساوی‌هایی به صورت $5^2 = 3^2 + 4^2$ یا $13^2 = 5^2 + 12^2$ (که در واقع این سه عدد، اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند) آشنا هستیم. ولی فرما در حاشیه‌ی یکی از کتاب‌هایی که مطالعه می‌کرد، چنین نوشت:

«از طرف دیگر، برای یک مکعب غیرممکن است که برابر مجموع دو مکعب دیگر باشد؛ یک توان چهارم برابر مجموع دو توان چهارم و در حالت کلی برای عددی که توانی بزرگ‌تر از دوم است، برابر مجموع دو توان مشابه خود باشد. من راه واقعاً بدیعی برای نشان دادن این امر پیدا کرده‌ام ولی این حاشیه گنجایش آن را ندارد».

آنچه به آخرین قضیه‌ی فرما معروف شده است، به زبان امروزی می‌گوید: برای $n > 2$ هیچ سه عدد صحیح x و y و z ای نمی‌توان یافت که در $x^n + y^n = z^n$ صدق کند اما دست یافتن به اثباتی که فرما مدعی آن شده بود، بیش از ۳۰۰ سال به طول انجامید. هر چند که به نظر نمی‌رسد ریاضیات زمان فرما از عهده‌ی پاسخ‌گویی به این مسئله برآمده باشد. کوشش‌های به عمل آمده در طول سه سده، در سال ۱۹۹۴ میلادی به نتیجه رسید و ریاضی‌دانی به نام آندرو وایلز، با استفاده از مباحثی از ریاضیات بسیار پیشرفته نظیر هندسه‌ی جبری و غیره، صحت ادعای فرما را ثابت کرد و به این ترتیب، آخرین قضیه‌ی فرما به اثبات رسید.

پی‌یر فرما، (۱۶۶۵-۱۶۰۱)

ولایة علی ابن ابی طالب حصنی لمن دخل حصنی
امن من عذابی ...

کاشی کار علی قزوینی مطهر امام رضا

کاشی کار علی قزوینی مطهر حضرت معصومه (س)

الگویابی هندسی

هندسه از دیرباز یاور بشر بوده است، اندازه‌گیری مساحت زمین‌های کشاورزی و پس از آن ساختمان‌سازی و ایزارسازی، نمونه‌هایی از کاربردهای هندسه هستند. ریاضی‌دانان دوران باستان به هندسه به عنوان علم محض نیز توجه ویژه‌ای داشتند. دستاوردهای آنان توسط اقلیدس فیلسوف و ریاضی‌دان یونان باستان به صورت یک دستگاه منطقی تدوین و گردآوری شد و نقش ویژه‌ای در تربیت فکر و آموزش تفکر منطقی پیدا کرد؛ به گونه‌ای که تا سال‌ها هم‌اوردی نداشت. امروزه نیز هرچند هندسه‌های نوین^۱ که شاخسارهای با طراوت این درخت کهن هستند، در علوم گوناگون کاربرد یافته‌اند ولی توجه به هندسه به عنوان ابزار قابل استفاده در زندگی روزمره و وسیله‌ی تربیت فکر هنوز هم در برنامه‌های آموزشی جایگاه برجسته‌ای دارد.

در طول تاریخ پیوند بین ایده‌های ریاضی به‌ویژه هندسه و هنر، مظهر و تجلی‌گاه روح زیبایی‌شناسی اندیشه‌های بلند انسان بوده است. طوری که در جای‌جای زندگی بشر حضور داشته است. معماری ایرانی - اسلامی پر از شاهکارهای هنری است که سرچشمه‌ی همگی آن‌ها اندیشه‌های ریاضی (به‌ویژه هندسه) بوده است. کاشی‌کاری‌های بناهای باستانی، مکان‌های دینی و طرح‌های قالی ایرانی هر انسانی را به تعجب وامی‌دارد. اگرچه در سرزمین‌های غیر اسلامی نیز آثاری از این دست وجود دارد اما هرگز به پای هنر ایرانی - اسلامی نمی‌رسند. در دوران اخیر این هنر ایرانی - اسلامی وارد سبک‌های هنری غربی نیز شده است.



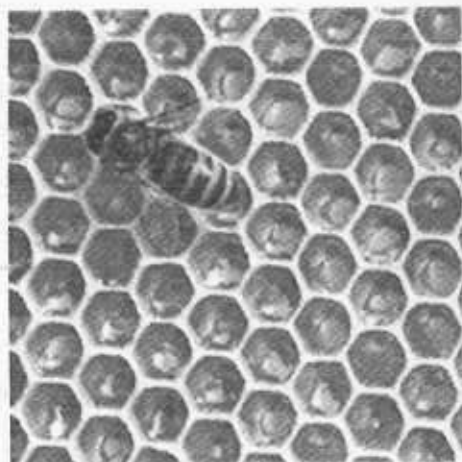
۱- هندسه‌های نئاقلیدسی، هندسه برخال‌ها (فرکال‌ها)

۳-۱- الگوهای هندسی در کاشی کاری

در طبیعت ساختارهای هندسی نمود فراوانی دارند که از آن جمله می توان شش ضلعی های منتظم در کندوی زنبور عسل، مسیر حرکت سیارات و نقش های گیاهان را نام برد.

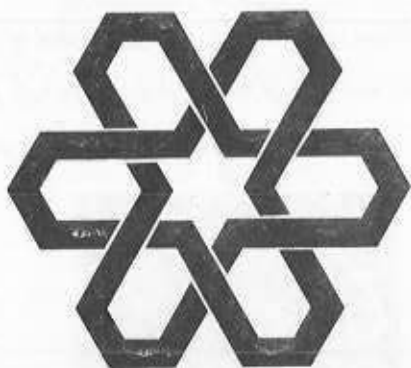


دایره

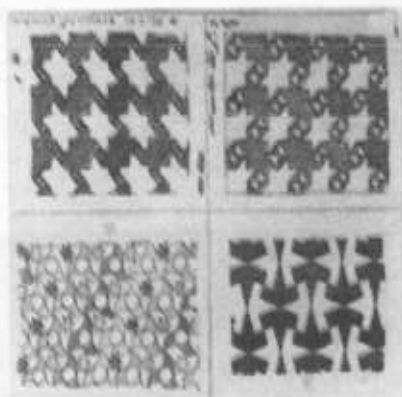


شش ضلعی منتظم

نظم هندسی طبیعت از یک سو ریاضی دانان را به شناخت مبانی ریاضی و هندسی پدیده های گوناگون برانگیخته است و از سوی دیگر، هنرمندان برای آفرینش آثار هنری خود از آن الهام گرفته اند. نقش های معماری ایرانی - اسلامی و تزئین های هنری ژاپن از این جمله اند.

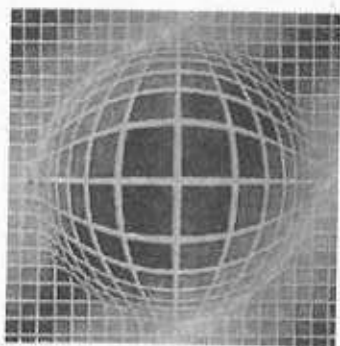


نقش تزئینی - ژاپن

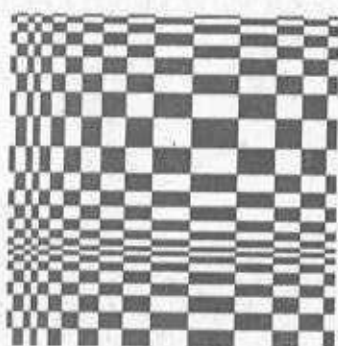


کاشی کاری - ایران

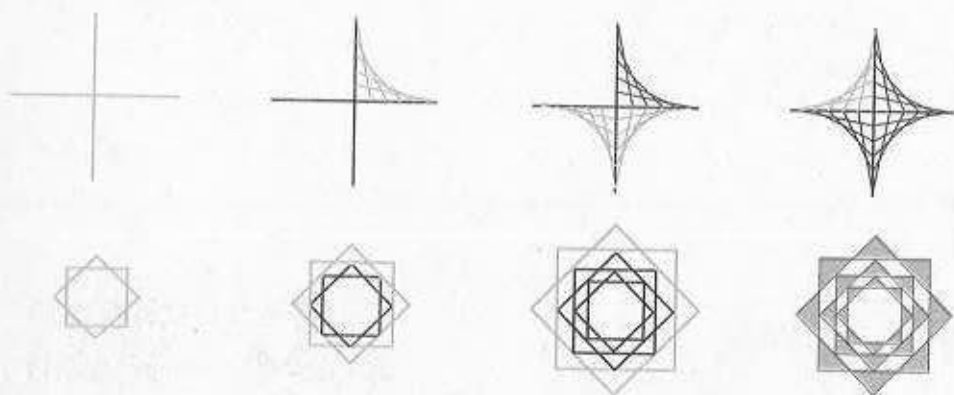
در هنر مدرن نیز نقش‌های هندسی دست‌مایه‌ی کار هنرمندان است. استفاده از تقارن و قرینه‌سازی به بسیاری از طرح‌ها و نقوش هنری جلوه‌ی خاصی بخشیده است ولی با ترکیب‌های ساده‌تر نیز می‌توان نقوش جالبی ایجاد کرد. نمونه‌های زیر از اولین گام‌های این راه است.



هنر مدرن، ویکتور وازارلی ۱۹۹۱

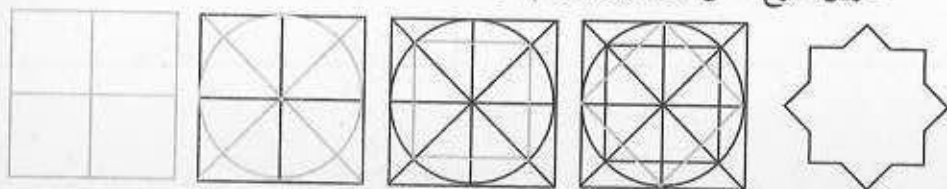


طرح مدرن، یک دانش آموز

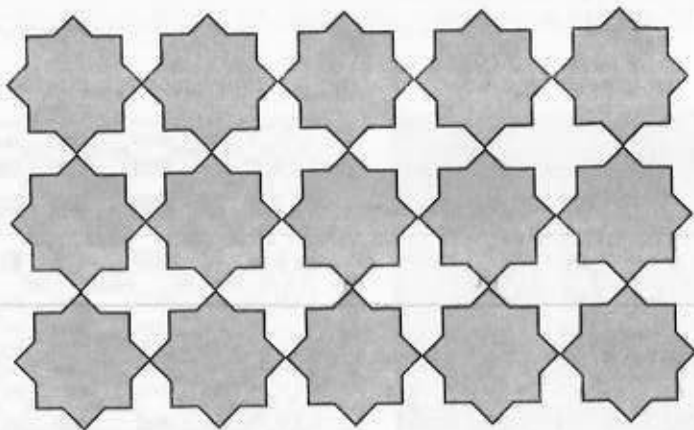


طرح‌های بالا را به ترتیب از چپ به راست کامل کنید و توانایی ترسیمی — هنری خود را آزمایش کنید!

طراحی نقش‌های کاشی‌کاری از طرح‌های تمرین پیش جالب‌تر است. با انجام دادن تمرین زیر، یکی از نقش‌های جالب و متداول در کاشی‌کاری به دست می‌آید.
تمرین: طرح کاشی‌کاری زیر را رسم کنید.

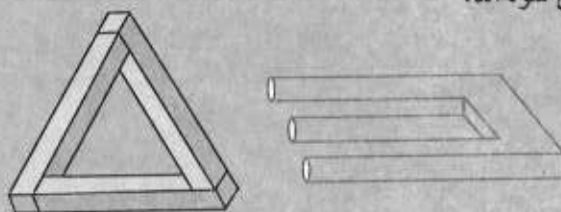


با ترکیب نقش فوق، می‌توان طرح‌های جالبی ابداع کرد. طرح زیر یکی از نقوش زیبا در کاشی کاری است. این نقش را به عنوان تمرین رسم کنید.



نقش‌های غیرممکن

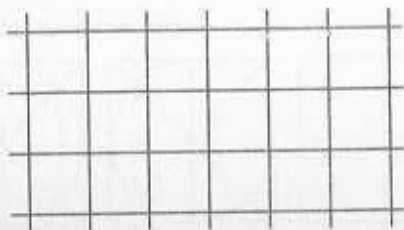
در خیال می‌توان از اشیایی که در جهان سه بعدی «غیرممکن» هستند، طرح‌هایی ایجاد کرد. دو طرح زیر از این نمونه‌اند.



آیا می‌توانید اشیای مشابهی طرح کنید؟

چگونه طرح‌های کاشی کاری هندسی تولید می‌شود؟

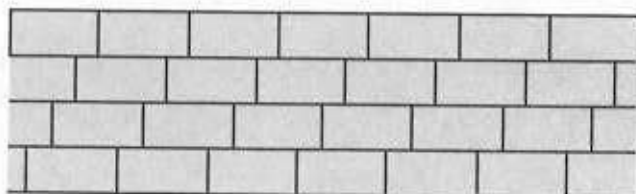
مسیح و هانف متوجه شباهت کاشی کاری آشپزخانه و آجرهای دیوار خانه‌شان شدند. مسیح: اگر کاشی‌های آشپزخانه مستطیل بودند، بسیار شبیه آجرهای دیوار حیاط می‌شدند.





هاتف : البته ردیف‌های آجر دیوار حیاط کمی با کاشی‌های آشپزخانه تفاوت دارند. هر آجر روی دو آجر ردیف پایین قرار می‌گیرد.

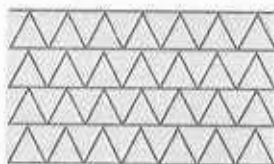
البته هر یک از ردیف‌ها را می‌شد با ترتیب دلخواه با کمی انتقال، آجرچینی کرد.



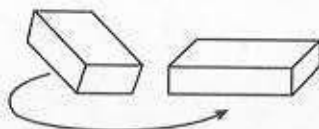
مسیح : راست می‌گویی؛ در واقع این ردیف‌ها هستند که به روش‌های مختلف به آجرهای مستطیلی یا مربع شکل تقسیم شده‌اند؛ مثلاً می‌شد با استفاده از کاشی‌های متوازی‌الاضلاع، هر ردیف را با آجرهایی به شکل متوازی‌الاضلاع پُر کرد.



هاتف : اگر به جای هر متوازی‌الاضلاع دو مثلث متساوی‌الاضلاع بگذاری، دیگر مجبور نمی‌شوی از دو نوع کاشی استفاده کنی و هر ردیف را با مثلث‌ها پر می‌کنی؛ مانند شکل زیر.

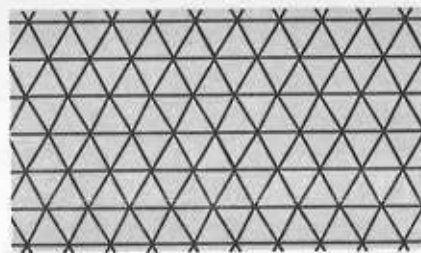


مسیح : اشتباه می‌کنی؛ شکل من فقط از یک نوع آجر درست شده است. با دقت نگاه کن! با یک دوران، بسیاری از آن‌ها مانند آجر دیگر به نظر می‌رسند.

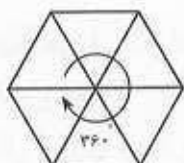


مسیح با دقت به آجرچینی مثلثی نگاه کرد و متوجه نکته‌ی جالبی شد.

مسیح : هاتف؛ اگر این ردیف‌ها را درست کنارهم بچینید، طوری که اضلاع مثلث‌ها درست رویه‌روی هم قرار بگیرند، شش ضلعی‌های جالبی در شکل صفحه‌ی بعد دیده می‌شوند.



هاتف : چقدر قشنگ! این به دلیل آن است که اگر شش مثلث متساوی الاضلاع را در یک گوشه در کنار هم قرار دهیم، یک شش ضلعی منتظم درست می شود. شبیه همین را در کاشی آشپزخانه هم داریم. در آن جا چهار مربع کنار هم هستند و یک مربع بزرگ تر را درست می کنند.



پیش از مطالعه ی ادامه ی بحث، مسئله های زیر را بررسی کنید و سپس در مورد آن ها بحث همگانی کنید.

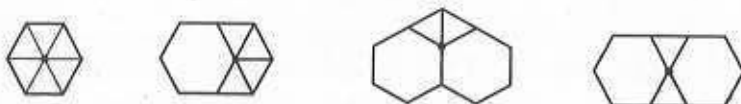
مسئله ی ۱: مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی منتظم برابر $(n-2) \times 180^\circ$ است.
مسئله ی ۲: اگر چند n ضلعی منتظم را کنار هم بچینیم، طوری که در یک گوشه، مجموع زاویه های این n ضلعی ها برابر 360° بشود (مانند دو شکل بالا)، آن گاه این n ضلعی فقط مثلث، مربع یا شش ضلعی خواهد بود.

راهنما: رسم شکل، تنظیم جدول نظام دار و الگویابی را به کار بگیرید.
مسئله ی ۱: اگر دقت کنی می بینی که در هر گوشه، شش مثلث، چهار مربع یا سه شش ضلعی می توان قرار داد. پس، اگر بخواهیم با یک کاشی منتظم کاشی کاری درست کنیم، باید روش دیگری هم باشد.
هاتف : درست است، یاد کن دوی زنبور عسل افتادم. می توان از روی آن، یک کاشی کاری با شش ضلعی ها درست کرد ولی دیگر مثل مثال های قبلی به شکل ردیفی نیست.



مسیح: پس نتیجه می‌گیریم اگر برای کاشی کاری بخواهیم از یک نوع کاشی که به شکل چندضلعی منتظم باشد استفاده کنیم، به طوری که اضلاع کاشی‌ها درست مقابل هم قرار بگیرند، فقط سه نوع کاشی کاری وجود دارد.

فردای آن روز هاتف که دانش‌آموزی بسیار کنجکاو بود، با چند شکل جالب پیش مسیح آمد. هاتف: سلام مسیح، بین چه مثال‌های جالبی درست کرده‌ام. اگر بخواهیم یک گوشه را با مثلث‌ها و شش‌ضلعی‌ها پر کنیم، چه روش‌های جالبی پیدا می‌شود!

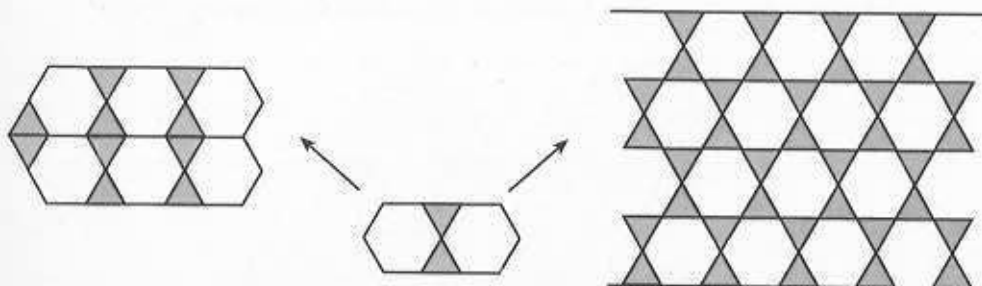


مسئله‌ی ۳: به غیر از مثال‌های بالا، چهار مثال دیگر از یک گوشه پیدا کنید که با مربع‌ها، مثلث‌ها یا شش‌ضلعی‌ها پر شده باشد.

مسیح با نگاه تحسین‌آمیزی به جدول نگاه کرد و گفت: سلام، جالب است که ترتیب قرار گرفتن کاشی‌ها را در کنار هم نیز در نظر گرفته‌ای.

هاتف لبخندی زد و گفت: بله! داشتیم به این فکر می‌کردم که کدام یک از این الگوها را می‌توان به یک کاشی کاری تبدیل کرد.

مسیح: البته زیبایی کاشی کاری‌های قبلی به این بود که در آن‌ها همه‌ی رئوس قابل انطباق بودند. مطمئن هستی که همه‌ی این‌ها را می‌شود این‌طور کامل کرد؟ مثلاً شکل زیر را در نظر بگیر که به چند روش کامل می‌شود. در یکی از این کاشی‌ها همه‌ی رئوس قابل انطباق هستند اما در دیگری این‌طور نیست.

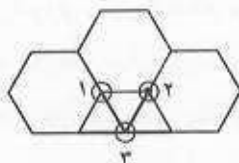


هاتف: بگذار ببینم؛ در یکی از کاشی کاری‌ها فقط گوشه‌هایی به شکل زیر وجود دارد.

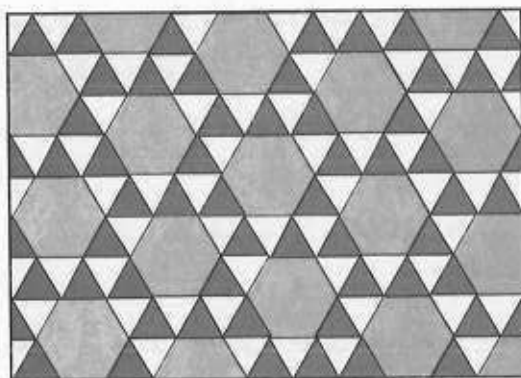




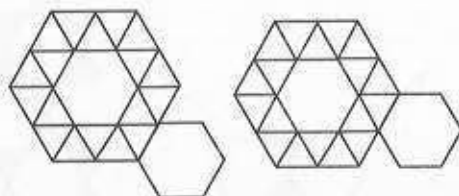
ولی در دیگری به جز گوشه‌هایی از نوع بالا، گوشه‌هایی از نوع دوم نیز دیده می‌شود که قابل انطباق بر گوشه‌های اولی نیستند.
 ببینیم می‌توانیم مثالی از یک کاشی کاری درست کنیم که در آن تنها نوع دوم استفاده شده باشد؟



به نظر می‌رسد این کار ممکن نیست؛ چون اگر گوشه‌ی ۲ را هم بخواهیم مانند گوشه‌ی ۱ کامل کنیم، در گوشه‌ی جدید، ۳ گوشه‌ی متفاوت با گوشه‌ی اولیه داریم.
 مسیح: بیا آخرین گوشه را هم امتحان کنیم تا ببینیم کدام‌ها یک کاشی کاری با گوشه‌های قابل انطباق درست می‌کنند. ببین، همین الگو را می‌توان ادامه داد.



هاتف: خوب ببین! یک نکته‌ی مهم را جا انداختی! می‌توانستی در آغاز با دو الگو شروع کنی.



این دو الگو قابل انطباق نیستند.

مسیح: ولی یک ارتباط جالب دارند. کمی فکر کن؛ می‌توانی آن را پیدا کنی.
 هاتف: ... بیا باهم الگوی دوم را کامل کنیم.

مسئله ۴: الگوی دوم را کامل کنید و ارتباط آن را با الگوی اول پیدا کنید.



مسئله‌ها

۱. چهار مثالی را که در مسئله ۴ درست کردید، بررسی کنید. کدام‌ها را می‌توان به یک کاشی کاری با گوشه‌های قابل انطباق گسترش داد؟ این کاشی کاری‌ها را رسم کنید.
۲. فرض کنید در یک کاشی کاری، بتوانیم دو نوع گوشه داشته باشیم. با مربع‌ها و مثلث‌ها چند کاشی کاری جدید بسازید.
۳. فرض کنید در یک کاشی کاری، بتوانیم دو نوع گوشه داشته باشیم. با مثلث‌ها و شش ضلعی‌ها چند کاشی کاری بسازید.
۴. نشان دهید با هر مثلث دلخواه می‌توان صفحه را فرش کرد. با چهارضلعی‌های دلخواه چه طور؟
۵. نشان دهید با هر شش ضلعی که مرکز تقارن داشته باشد، می‌توان تمام صفحه را فرش کرد.
۶. چند نوع کاشی کاری با کاشی‌های غیرمنتظم ارائه کنید که تمام رأس‌های آن قابل انطباق باشند. آیا می‌توانید آن‌ها را به یک کاشی کاری منتظم تبدیل کنید؟ آیا کاشی کاری یک‌نواختی به دست می‌آید؟
۷. چند منبع کاشی کاری سنتی ایران را انتخاب کنید و بکشید الگوی پایه‌ی آن‌ها را که از یکی از کاشی کاری‌هایی که تا به حال به دست آمده گرفته شده است، از بین آن‌ها شناسایی کنید. چرا نظم این الگوها این چنین برای ما چشم‌نواز است؟ این سؤال را در کلاس به بحث بگذارید.
۸. الگوهای هندسی کاشی کاری‌های حرم مطهر امام رضا (ع) و حرم مطهر حضرت معصومه (س) را که در ابتدای فصل آمده است، پیدا کنید.

در نمازم خم ابروی تو در یاد آمد . . .



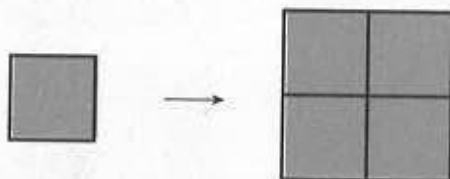
محراب نمازخانه‌ی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

الگوی هندسی کاشی‌کاری محراب را رسم کنید.

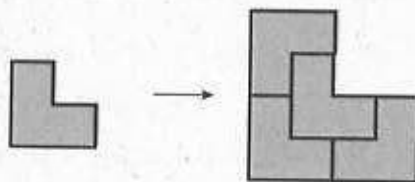
۳-۲- طراحی هنری

یک مسئله‌ی مبارزه طلب و یک داستان علمی - تخیلی!

یک محقق زیست شناس موفق شده است با مهندسی ژنتیک سلول‌هایی دو بُعدی بسازد که هنگام تکثیر به چهار سلول کوچک‌تر و مشابه خود تقسیم می‌شوند. این انقلاب عظیمی در علم زیست شناسی است؛ چرا که تمام سلول‌های شناخته شده هنگام تقسیم به دو نمونه‌ی مشابه خود تقسیم می‌شوند. این محقق موفق به کشف نوعی از این سلول‌ها شده است که شکل آن‌ها و نحوه‌ی تقسیم شدنشان در شکل زیر دیده می‌شود. او به دنبال شکل‌های دیگری با الگوی تقسیم چهارتایی است تا سلول‌هایی به این شکل‌ها تولید کند. آیا می‌توانید او را یاری دهید؟

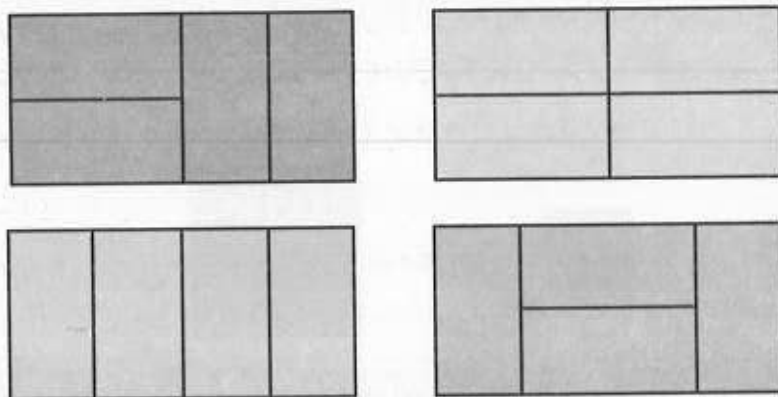


این مسئله به نظر دانش آموزان بسیار ساده آمد. گروه‌های حل مسئله به بحث و بررسی مشغول شدند. پس از چند دقیقه‌ی کوتاه گروه دوستان اعلام کردند که شکل جالبی ساخته‌اند که دارای خاصیت تقسیم چهارتایی است. سیافوش، یحیی و اشکان نسبت به راه‌حلی که به دست آورده بودند، احساس خوبی داشتند. معلم از اشکان خواست تا روند حل مسئله را برای دانش آموزان شرح دهد. اشکان: جوابی که ما پیدا کردیم، به شکل زیر است اما روند حل مسئله را بهتر است سیافوش یا یحیی توضیح دهد! چون من هنوز در مورد بعضی نتیجه‌گیری‌های ایشان قانع نشده‌ام.

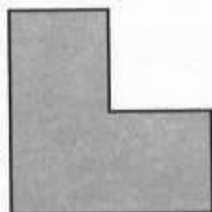


معلم: حل مسئله فرآیندی گروهی است و بدون کار گروهی هیچ وقت «مسئله حل کن» خوبی نمی‌شویم. حتی ایده‌ها و دیدگاه‌های مختلفی که هر یک از ما هنگام حل مسئله به کار می‌بریم، به هم کمک می‌کنند و در نتیجه‌ی فعالیت گروهی این دیدگاه‌هاست که به جواب می‌رسیم. اگر خوب فکر کنید، می‌بینید که هنگام حل مسئله در درون شما اتفاقاتی می‌افتد و دیدگاه‌های مختلف شما با همکاری یک‌دیگر مسائل را حل می‌کنند. به همین دلیل، بهتر است روند حل مسئله را خود شما شرح دهید و در مواردی که قانع نشده‌اید، از دوستان کمک بگیرید.

اشکان : بسیار خوب! من سعی خودم را می کنم. در نگاه اول این مسئله ما را به یاد کاشی کاری می اندازد؛ زیرا در این جا شکلی می سازیم که از چهار کاشی کوچک تر ولی مشابه آن است. سیاوش شروع به بررسی الگوهای کرد که از دو مربع، سه مربع، یا بیش تر تشکیل شده اند. به سادگی می توان دید که دو مربع کنار هم نیز پاسخی برای مسئله درست می کند که می توان آن را به روش های مختلف به چهار شکل مشابه تقسیم کرد.



یحیی اشاره کرد که یکی از الگوهای تقسیم بالا بسیار شبیه به الگویی است که محقق زیست شناس به دست آورده است. برای همین، این مثال ما را قانع نکرد. سیاوش به بررسی مثال بعدی پرداخت. سه مربع که به طور خطی کنار هم قرار گرفته اند، همان الگوی تکراری را به دست داد.



الگوی بعدی که باید بررسی می شد، شکل روبه رو بود که باید توسط چهار کاشی مشابه خودش فرش می شد.

سعی می کردم اثبات کنم که فرش کردن شکل روبه رو توسط کاشی های مشابه امکان ندارد که یحیی با الگوی خود مرا بهت زده کرد.

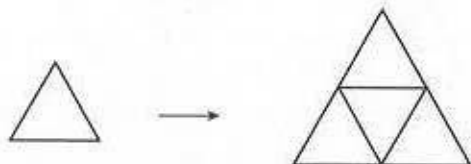
اما من نفهمیدم که یحیی جواب خود را از کجا آورد. همین طور متوجه نشدم که چرا سیاوش الگوهای را بررسی کرد که توسط دو مربع، سه مربع یا بیش تر تشکیل می شوند. البته، یک نکته ی جالب توجه را جلب کرد. در این مثال برخلاف مثال زیست شناسی، سلول ها را نمی توان با انتقال بر هم منطبق کرد. مجبوریم از دَوَران هم استفاده کنیم.

سیاوش : من کار عجیبی نکردم. مثالی که زیست شناس به دست آورده بود، مرا به یاد کاشی کاری آتشیخانه انداخت. چهار خانه ها مرا بی اختیار وادار کردند که اشکال خود را در دنیای چهارخانه ها

بسازم.

اشکان: می توانستی به یاد کاشی کاری مثلثی هم بیفتی! چرا سعی نکردی اشکال خود را در دنیای مثلث ها پیدا کنی؟

یحیی: صبر کنید: من متوجه نکته ی جالبی شدم. اگر طول ضلع مثلث را دو برابر کنیم، مثلث جدیدی به وجود می آید که متشکل از چهار مثلث اولیه است.



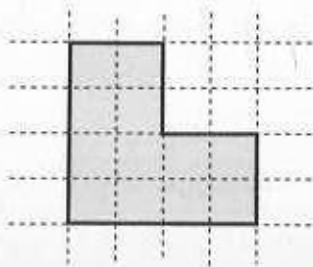
اشکان: مثال جالبی است اما چرا طول ضلع را دو برابر کردی؟

یحیی: صبر کن ببینم! شاید به این دلیل که همین کار را در مورد مربع کرده بودیم! اگر دقت کنید، می بینید که مثلث هم مانند مربع این خاصیت را دارد که اگر آن را دو برابر کنیم، مساحتش چهار برابر می شود. این ویژگی به ما کمک می کند که آن را به چهار کاشی مانند کاشی اولیه تقسیم کنیم. اشکان: اما فقط مربع و مثلث این خاصیت را ندارند. تمام شکل های دو بعدی که در صفحه هستند، این خاصیت را دارند.

مسئله ی ۱: چرا مساحت هر شکل دو بعدی با دو برابر شدن آن شکل، چهار برابر مساحت اولیه می شود؟

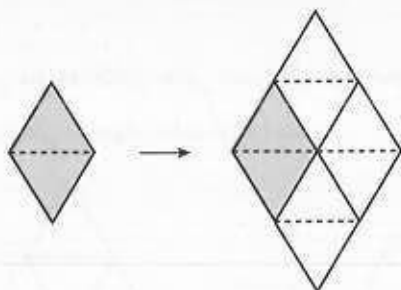
سپاوش: اشکان درست می گوید! به همین دلیل، من سعی می کردم با دو برابر کردن الگوهای اولیه آن ها را بررسی کنم.

اشکان: پس برای همین، یحیی خیلی زود توانست شکل نهایی را با کاشی های مشابه بپوشاند! در واقع او شبکه ی کاشی های مربعی را درون ذهن خود داشت. مانند زیر:

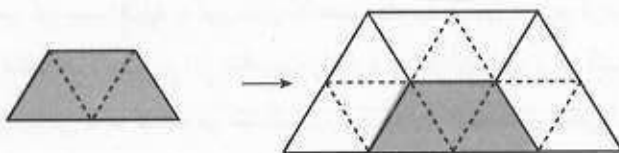


یحیی: همین طور است! حالا که فکر می کنم، راه حل خودم طبیعی تر به نظر می رسد.

اشکان: همین کار را می‌توانستیم در شبکه‌ی مثلثی هم انجام دهیم؟ مثلاً دو مثلث در کنار هم الگوی زیر را می‌سازند که بسیار شبیه به الگوی مربعی است.



اشکان: یا اگر سه مثلث را کنار هم بگذاریم، الگوی جدید زیر به‌دست می‌آید که بسیار جالب است.



همه‌ی دانش‌آموزان از این گفت‌وگو و شکل جالبی که به‌دست آمده بود، هیجان زده شده بودند و هر کسی سعی می‌کرد قبل از دیگران شکلی را بیابد که قبلاً پیدا نشده بود.

مسئله‌ی ۲: شما هم در کلاس خود دست به کار شوید و ببینید چه اشکال جدیدی را کشف می‌کنید! اشکال به‌دست آمده را با اشکال هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

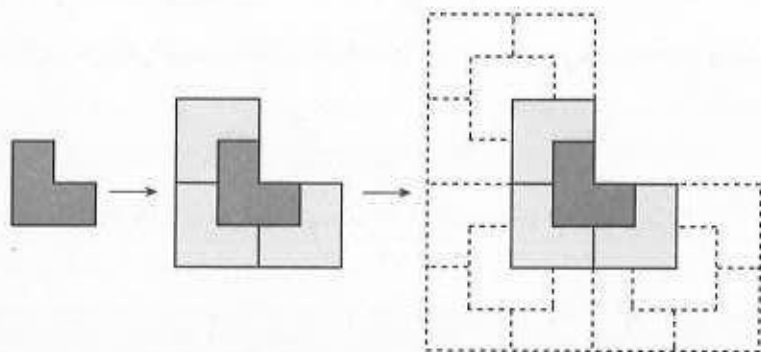
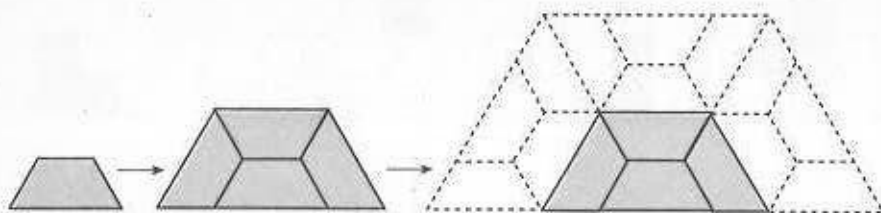
سیاوش، بر خلاف همه‌ی دانش‌آموزان، با آرامش به این اشکال منظم خیره شده بود. او از نظم این کاشی‌ها لذت می‌برد و پیش از آن که بخواهد شکل‌های جدیدی به‌دست بیاورد، دوست داشت نظم همین کاشی‌کاری‌ها را بهتر دریابد. در همین فکر بود که ایده‌ی جالبی به نظرش رسید. دوست داشت این ایده را با دیگران هم در میان بگذارد. معلم به او اجازه داد که صحبت کند.

سیاوش: واقعاً معذرت می‌خواهم که فکر شما را نیمه تمام می‌گذارم، ولی ایده‌ی جالبی به نظر آمده است. من می‌توانم ثابت کنم که با هر کاشی که بتوان آن را با کاشی‌های مشابه کوچک‌تر فرش کرد، می‌توان یک سطح را هم فرش کرد.

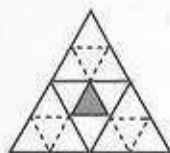
معلم از سیاوش خواست برای ادعای خود استدلال بیاورد.

سیاوش گفت: خیلی ساده است! به‌جای آن که داخل کاشی را فرش کنیم، با همان تعداد کاشی

بیرون کاشی را فرش می‌کنیم و این کار را ادامه می‌دهیم؛ یعنی، هر بار که الگوی بزرگ‌تری به‌دست آوردیم، باز به همان روش آن الگو را به الگویی باز هم بزرگ‌تر توسعه می‌دهیم؛ مانند اشکال زیر:



اشکان: صبر کن! بی‌دقتی کردی! اگر بیش‌تر توجه کنی، خواهی دید که الگوی دوزنقه‌ای تنها نصف صفحه را کاشی‌کاری می‌کند و الگوی دیگر فقط سه ربع صفحه را! البته در مورد الگوی چهار مثلث همان اتفاق می‌افتد که انتظار آن را داریم؛ یعنی، تمام صفحه را پر می‌کند. یحیی: من می‌توانم این مشکل را حل کنم! ما مجبور نیستیم هر بار همان الگو را تکرار کنیم و شکل بزرگ‌تری به‌دست بیاوریم.



اشکان: منظورت را نمی‌فهمم.

یحیی: به این شکل‌ها توجه کن. هر بار که الگوی دوزنقه را تکرار می‌کنیم، چند انتخاب

مختلف داریم:



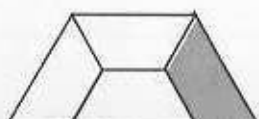
(۱)



(۲)

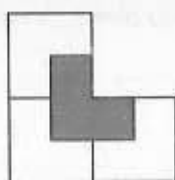


(۳)

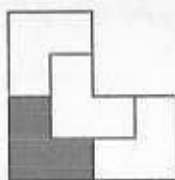


(۴)

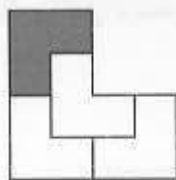
یحیی: در مورد الگوی دیگر هم همین طور.



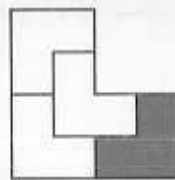
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

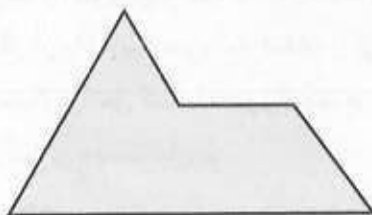
مسئله ۳: از ایده ی یحیی استفاده کنید و مشکلی را که اشکان در الگوهای سیاوش پیدا کرد با استفاده از این ایده، برطرف کنید.

اشکان: خوب می فهمم! با تکرار الگوها یکی پس از دیگری می توان به همین ترتیب، ناحیه های بزرگ تر و بزرگ تری را کاشی کرد. با این حال، برای هر شکل مجبوریم ترتیب این الگوها را مشخص کنیم. این ها همه درست، اما استدلال سیاوش هنوز اشکال دارد.

سیاوش: درست می گویی! حرف دیگری ندارم ولی بدم نمی آید کمی بیش تر با ایده ام زور آزمایی کنم. فراموش نکنید که ایده ی من منجر به چند کاشی کاری زیبا در صفحه شده است.

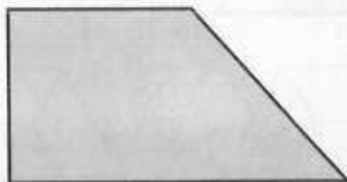
به خاطر داشته باشید که همواره باید درستی ایده های خود را به طور کامل بررسی کنید.

مسئله ۴: آیا می توانید شکل زیر را با چهار نمونه ی مشابه آن فرش کنید؟

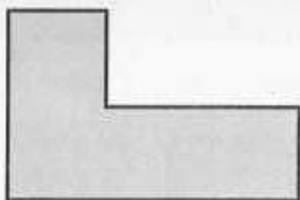


یک صفحه را با مثلث های متساوی الاضلاع کاشی کاری کنید. سپس با استفاده از این الگو تمام صفحه را با شکل بالا فرش کنید.

مسئله ۵: آیا می توانید شکل زیر را با چهار نمونه ی مشابه آن فرش کنید؟

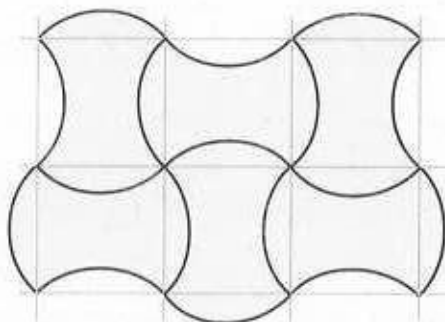


مسئله ۶: در مورد این شکل چه طور؟



یحیی: برای من این سؤال پیش آمده است که با چه کاشی‌هایی می‌توان تمام صفحه را فرش کرد.

سیاوش: بسیاری از این الگوها را می‌توان با یک تغییر پیوسته اما منظم از همان کاشی‌کاری‌های قبل به دست آورد؛ مثلاً این کاشی را من در کاشی‌کاری‌های کف خیابان دیده‌ام.



سیاوش که به هنر علاقه‌مند بود و به همین دلیل دقت هنری خاصی داشت، به این فکر افتاد که کاشی‌هایی به شکل موجودات زنده طراحی کند که بتوان با آن‌ها تمام صفحه را فرش کرد. او این ایده را در کلاس مطرح کرد. معلم از شنیدن ایده‌ی سیاوش بسیار خوشحال شد و گفت: اتفاقاً این ایده به



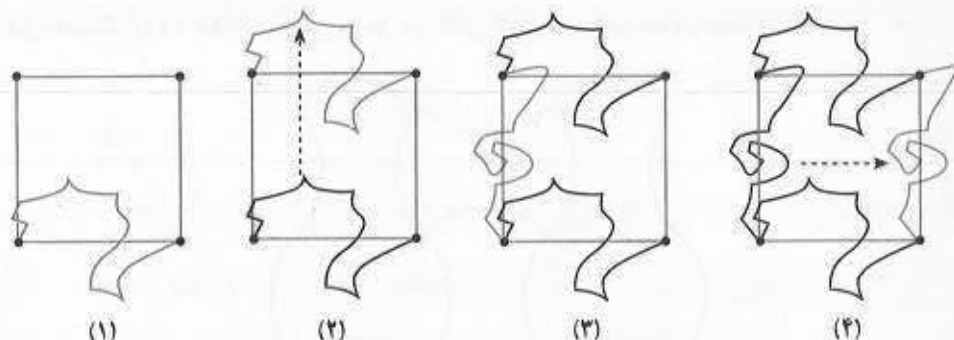
ذهن نقاش معروف، اِشَر، نیز رسیده است! هفته‌ی بعد معلم چند اثر هنری از اِشَر را به کلاس آورد و گفت: اِشَر از کاشی‌کاری‌های مسجد الحرام ایده گرفت و طرح‌های بسیار جالبی ارائه داد. به این طرح توجه کنید.

معلم: فکر می‌کنید اِشَر برای طراحی الگوی روبه‌رو از کدام یک از الگوهای کاشی‌کاری که می‌شناسیم، استفاده کرده است؟

سیاوش : رنگ آمیزی شطرنجی مرا به یاد صفحه‌ی شطرنج می‌اندازد.

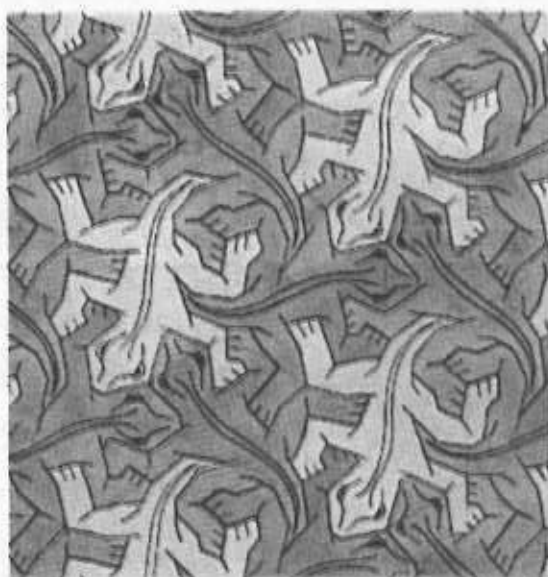
یحیی : می‌توان این طور هم فکر کرد که هر اسب یا چهار اسب دیگر همسایه است و در هر گوشه هم چهار اسب به هم می‌رسند. اگر کمی دقت کنیم، می‌بینیم که این چهار گوشه روی یک مربع قرار گرفته‌اند.

اشکان : می‌توان کاشی کاریِ اِشیر را در چند مرحله‌ی زیر از صفحه‌ی شطرنجی به دست آورد.



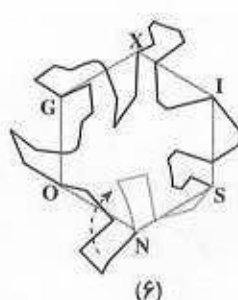
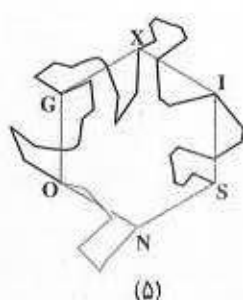
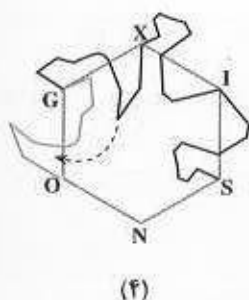
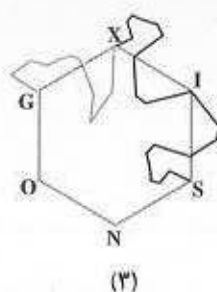
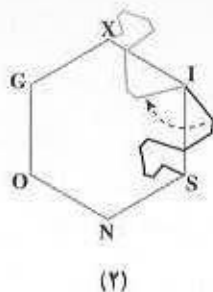
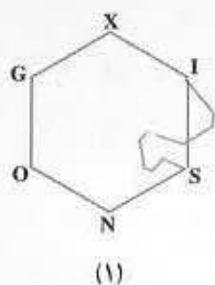
معلم دومین شکل را در معرض دید دانش آموزان قرار داد و از آن‌ها خواست تا آن را بازسازی

کنند.

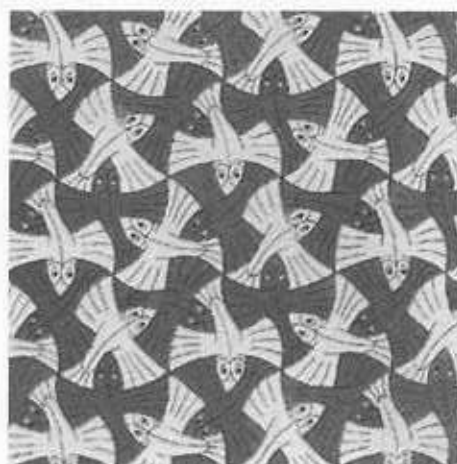


اشکان : بررسی این طرح خیلی شبیه همان الگوی اول است. هر قورباغه با شش قورباغه‌ی دیگر همسایه است و در هر گوشه، سه قورباغه به هم می‌رسند. پس این کاشی کاری شبیه کاشی کاری لانه‌ی زنبور عسل است. اگر دقت کنیم، با وصل کردن این گوشه‌ها شش ضلعی منتظم به دست می‌آید.

می‌توان این کاشی‌کاری را در مراحل زیر به‌دست آورد.



دو طرح زیر را در کلاس بازسازی کنید.

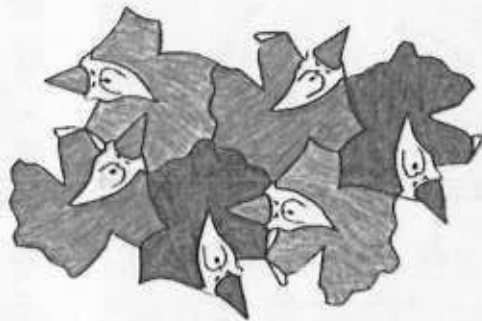
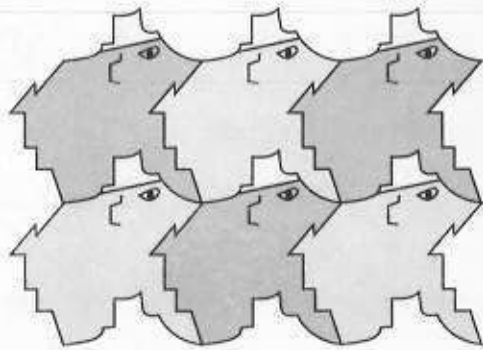
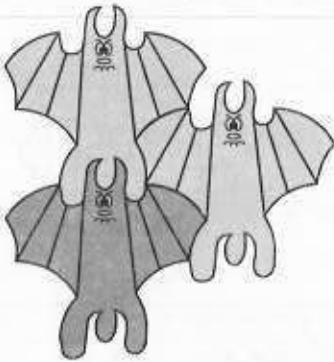


آیا در روش بازسازی طرح‌های اشر، تفاوتی اساسی مشاهده می‌کنید؟
 آیا می‌توان با انتقال و دَوَران، کاشی‌های هریک از دو طرح بالا را برهم منطبق کرد؟ اگر بازتاب
 (تصویر آینه‌ای) را هم اضافه کنیم چطور؟

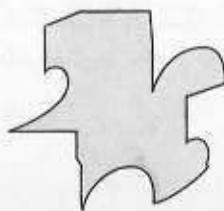
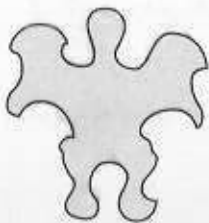
مسئله‌ها



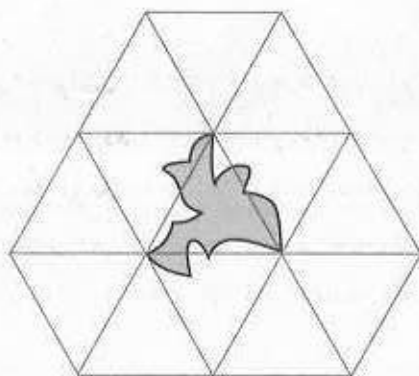
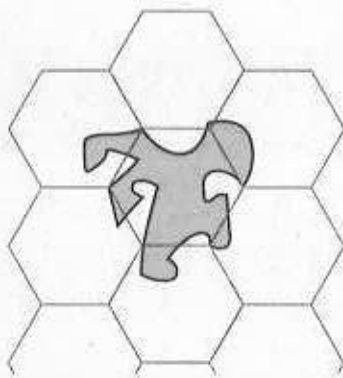
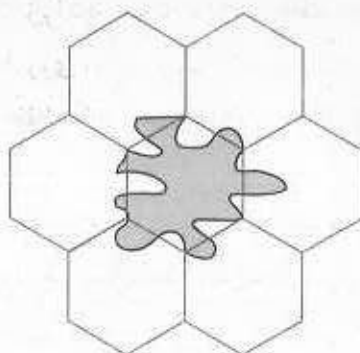
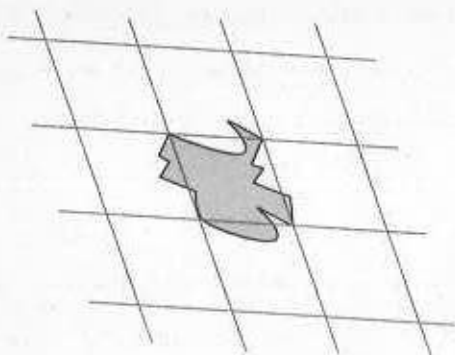
۱. در هر یک از شکل‌های زیر، الگوهای هندسی را که این طرح‌ها به کمک آن‌ها ساخته شده‌اند، بیابید.



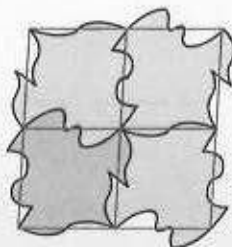
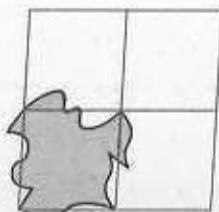
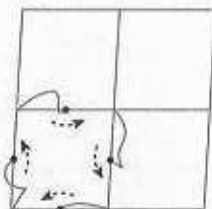
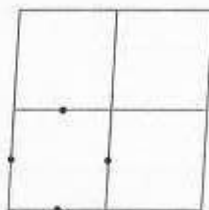
۲. الگوهای زیر طرح‌هایی از موجودات زنده است. این الگوها را نقاشی کرده و به کمک آن‌ها کاشی کاری‌ها یا طرح‌هایی هنری ابداع کنید.



۳. با هریک از شکل‌های زیر، یک کاشی‌کاری از صفحه تولید کنید.



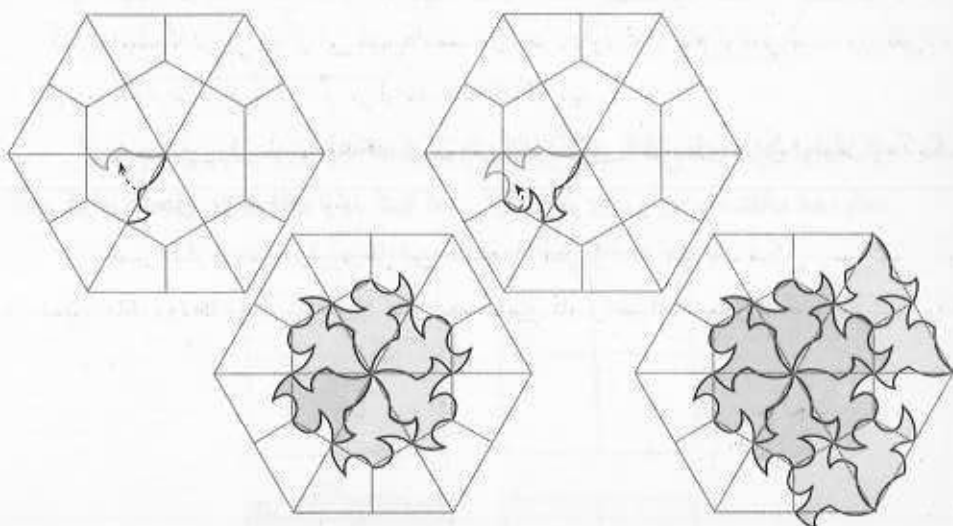
۴. به چندین روش می‌توان به کمک دَوران کاشی‌کاری یا طرح‌های هنری تولید کرد. یک کاشی‌کاری با تصویر موجودات تولید کنید که در آن از الگوی دَوران زیر استفاده شده باشد.



۵. یک کاشی کاری با تصویر موجودات مشخص تولید کنید که کاشی های آن توسط دَوَران و انتقال مطابق الگوی زیر تولید شده باشد.



۶. در شکل زیر، کاشی های شش ضلعی به چهار ضلعی های مشابه تقسیم شده اند. به کمک آن ها و با به کارگیری بعضی از خواص هندسی، یک الگو ارائه شده است.



الف : خواص هندسی به کار رفته در الگوی بالا را توصیف کنید.
 ب : یک کاشی کاری از تصویر موجودات زنده ارائه کنید که براساس الگوی فوق ساخته شده باشد.

باشد.



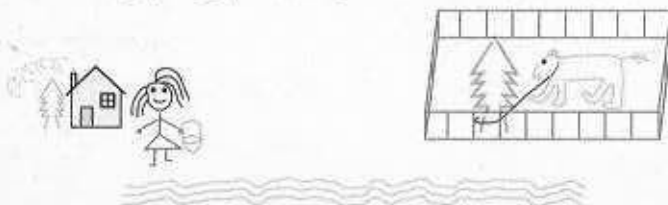
۳-۳- مدلسازی هندسی مسائل زندگی واقعی

مسئله‌ی شیردوش، رودخانه و گاو

روایت کرده‌اند که زن شیردوشی در ساحل رودخانه‌ای زندگی می‌کرد. او گاوش را در همان طرف رودخانه در فاصله‌ای دورتر به درختی می‌بست. زن شیردوش برای دوشیدن شیر گاو هر روز فاصله‌ی بین خانه و باربند گاوش را طی می‌کرد. ضمناً هر بار می‌بایست خود را به کنار رودخانه برساند و ظرف شیردوشی را در آب رودخانه بشوید و سپس به باربند گاوش برود. او می‌دانست که مسیرهای زیادی از خانه به رودخانه و باربند وجود دارد. اگرچه او از این نکته‌ی جالب و مهم هم آگاهی داشت که در بین همه‌ی این مسیرها، مسیری وجود دارد که از همه کوتاه‌تر است، ولی نمی‌دانست آن را چگونه می‌تواند بیابد. اگر می‌توانید به او کمک کنید.

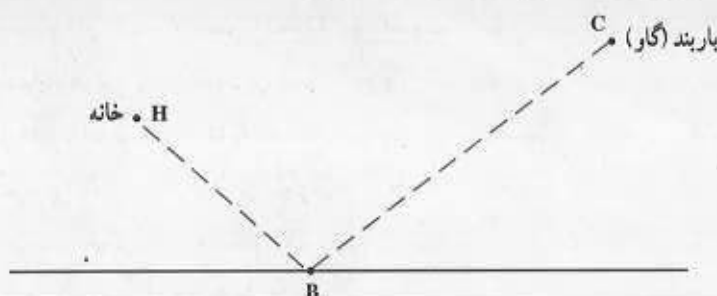
ایست! قبل از ادامه‌ی مطالعه، برای حل مسئله تلاش کنید. رسم یک شکل کمک خوبی برای شروع حل این مسئله است.

مسیر تفکر زن شیردوش در حل این مسئله: او فکر کرد که ابتدا باید شکلی رسم کند و در آن شکل خانه، رودخانه و باربند گاو را نشان دهد. همین کار را هم کرد. سپس نقطه‌ای را کنار رودخانه

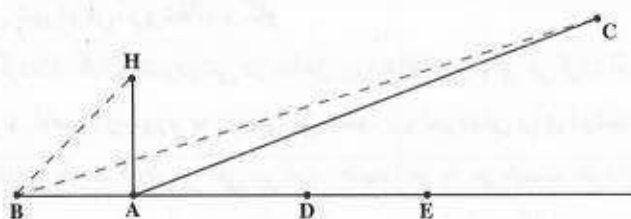


مشخص کرد؛ جایی که سطل شیر را می‌شست. آیا مکان این نقطه اهمیت دارد؟ او می‌دانست که کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه یک خط راست است بنابراین خطی را از خانه به نقطه‌ی محل شستن سطل رسم کرد و یک خط راست دیگر هم از محل شستن سطل تا باربند کشید. فاصله‌ای که

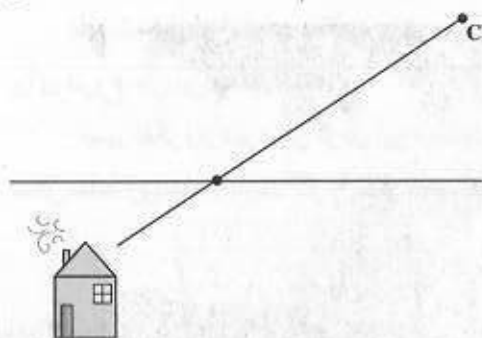
باید هر روز طی می کرد، مجموع طول این دو مسیر بود.



مکان نقطه‌ی روی رودخانه دارای اهمیت است؛ زیرا اگر مکان نقطه در A باشد؛ آن گاه کل مسافت کوتاه‌تر از زمانی است که مکان روی رودخانه در نقطه‌ی B باشد (شکل زیر).

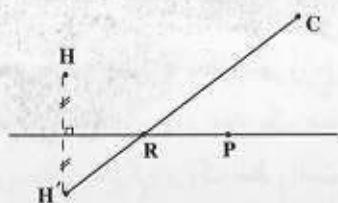


آیا کل مسیر برای نقاط D و E کوتاه‌تر است؟ شاید دو مسیر برابر باشند! تصمیم گرفتن در این جا کار سختی است. اگر کل مسیر یک خط راست بود، خیلی قشنگ می شد! اما اکنون هر مسیر یک شکستگی دارد و از دو پاره خط تشکیل شده است. راستی اگر خانه‌ام آن طرف رودخانه بود به راحتی



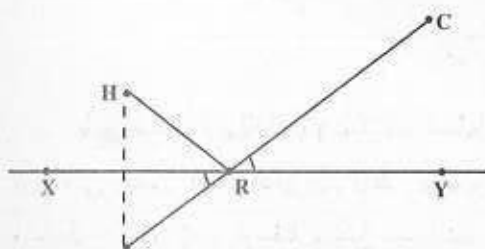
یک خط راست از خانه به باربند گاو رسم می کردم و محلی که باید سطل را می شستم، معلوم می شد! ولی کمی دردسر داشت. چون باید از آب رودخانه عبور می کردم! صبر کن! فکر جالبی است! شاید بتوان ...!

اجازه دهید فکرم را آزمایش کنم. یک برگردان (کپی) از خانه نسبت به رودخانه در طرف دیگر می سازم؛ خانه‌ام در این طرف رودخانه، در نقطه‌ی H واقع است. کافی است قرینه‌ی H را نسبت به رودخانه در آن طرف به دست آورم.



اگر H' به C وصل شود، کار تمام است. در این مرحله، باید دلیل بیاوریم که مسیر H' تا C برابر H به R و سپس از R به C است. استدلال این قسمت را کامل کنید. آیا کار تمام شده است؟ شیردوش زن بسیار باهوشی بود، باخود می گفت: این کار یک نقطه روی رودخانه برایم مشخص کرد و یک مسیر از H به R و سپس از R به C اما آیا این بهترین مسیر است؟ فرض کنید من سطل را در نقطه‌ی دیگری مانند P کنار رودخانه می‌شستم، آن‌گاه مسیر از HP و PC تشکیل می‌شد. چگونه این مسیر را با مسیر HR به اضافه‌ی RC مقایسه کنیم؟ اگر در آن طرف رودخانه زندگی می‌کردم و در نقطه‌ی P ظرف شیر را می‌شستم، مسیرم از $H'P$ به اضافه‌ی PC تشکیل می‌شد که همان اندازه‌ی HP به اضافه‌ی PC را داشت (چرا؟) آن‌گاه چون کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین دو نقطه، خط راست است و مسیر H' به R و R به C یک خط راست است، مسیر H' به P و P به C بزرگ‌تر می‌بود. در نتیجه

مسئله‌ی ۱: فرض کنید X و Y دو نقطه در بالا و پایین رودخانه است و R نقطه‌ی مطلوب روی

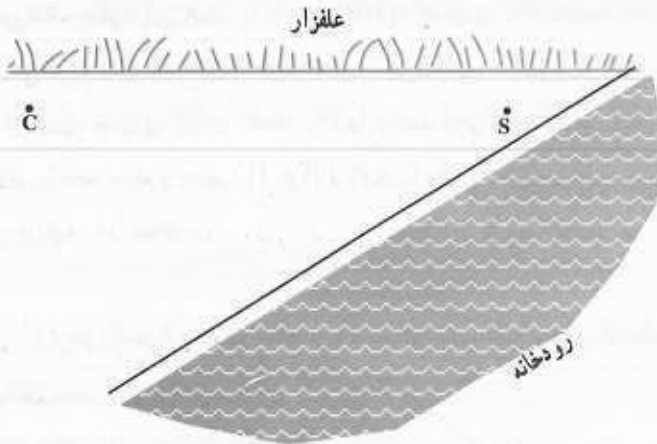


رودخانه در مسئله‌ی شیردوش است. نشان دهید R دارای این خاصیت است که زاویه‌های HRX و CRY مساوی‌اند. به علاوه، ثابت کنید R تنها نقطه‌ای است که روی خط (رودخانه) دارای این خاصیت است.



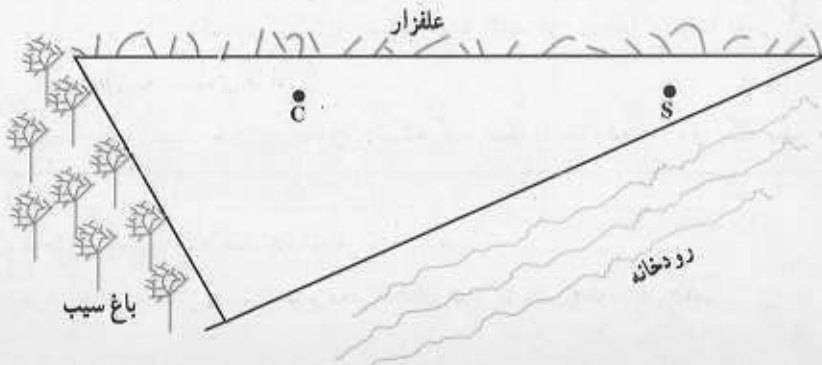
مسئله‌ی چوپان (گاوپران)

در تصویر زیر، یک چوپان در نقطه‌ی C روی اسبش سوار است. او قبل از حرکت به سمت اردوگاه (نقطه‌ی S)، ابتدا برای جمع‌آوری علف برای اسبش به علفزار می‌رود؛ سپس برای نوشیدن آب به کنار رودخانه رفته و پس از آن به اردوگاه می‌رود. کوتاه‌ترین مسیر را از نقطه‌ی C به علفزار و سپس به رودخانه و بعد از آن به قرارگاه (S) بیابید. استدلال همه‌ی مراحل را به صورت کامل ارائه کنید.



مسئله‌ی ۲: فرض کنید چوپان ابتدا از نقطه‌ی C برای نوشیدن آب به کنار رودخانه و سپس به علفزار برود و بعد از آن به اردوگاه برگردد. کوتاه‌ترین مسیر را در این حالت تعیین کنید. طول این مسیر را با طول کوتاه‌ترین مسیر در مسئله‌ی چوپان مقایسه کنید. (یک شکل هندسی می‌تواند کمک کند)

مسئله‌ی ۳: بار دیگر چوپان را سوار بر اسب، در نقطه‌ی C در نظر بگیرید. این بار، او ابتدا به طرف ضلع سوم میدان - که باغ سیب است - می‌رود تا مقداری سیب بچیند. سپس برای تهیه‌ی علفی اسبش به علفزار (ضلع دیگر میدان) و بعد از آن برای نوشیدن آب به کنار رودخانه می‌رود. چوپان در نهایت، از رودخانه به اردوگاه خواهد رفت. کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟ چرا؟



مدرسه را کجا باید ساخت؟

دهکده‌های خیام، خوارزمی و بیرونی در دشت سرسبز و حاصل خیزی قرار دارند. این سه دهکده روی یک مسیر مستقیم نیستند. چون هر دهکده تعداد اندکی دانش‌آموز دارد، ریش سفیدان سه دهکده تصمیم گرفته‌اند که مدرسه‌ای برای سه دهکده بسازند. آن‌ها می‌خواهند محل ساختمان مدرسه را طوری انتخاب کنند که طول مسیر رفت‌وآمد بچه‌های هر سه دهکده یک‌سان باشد به آن‌ها کمک کنید!

روحیه‌ی مبارزطلبی خود را هنگام حل مسئله تقویت کنید: ابتدا برای حل مسئله تلاش کنید، بعد بحث را پی‌گیرید.

دریا و ساحل با مشارکت یک‌دیگر این مسئله را حل کرده‌اند. بحث‌ها و روند کار آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

ساحل: دریا، شما هم مثل من فکر می‌کنید؟ به نظر من این مسئله شبیه مسئله‌های ریاضی نیست.

دریا: ما قبلاً هم مسئله‌هایی را حل کرده‌ایم که در نگاه اول مسئله‌ی ریاضی نبودند ولی هرچه بیش‌تر دقت می‌کردیم، ارتباط آن‌ها را با ریاضی بیش‌تر متوجه می‌شدیم.

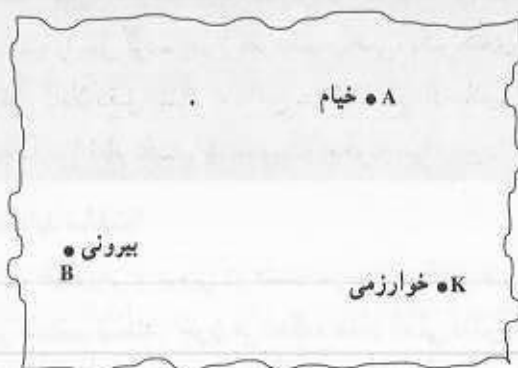
ساحل: اتفاقاً، اولین چیزی که از این مسئله به ذهنم رسید، مثلث بود؛ زیرا خانه‌ی پدری‌زرگ من در روستایی است که دو روستای دیگر هم در نزدیکی آن قرار دارد. وقتی بالای کوه پشت روستا می‌رویم، سه تا روستا و جاده‌های بین آن‌ها شکلی شبیه مثلث می‌سازند! اما بعداً خیال کردم که این موضوع هیچ ربطی به مسئله‌ی ما ندارد.

دریا: جالب است. چون در صورت مسئله گفته شده که سه دهکده روی یک مسیر مستقیم نیستند.

ساحل: خوب، حالا باید چه کاری انجام بدهیم؟

دریا: بیا یک شکل رسم کنیم و محل دهکده‌ها را با یک نقطه نشان دهیم.

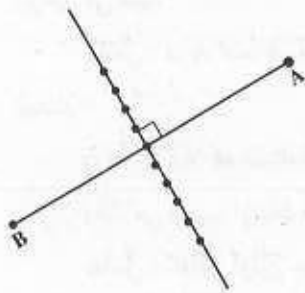
دریا سپس این شکل را رسم کرد.



اکنون سؤال مسئله از ما می‌خواهد که نقطه‌ای را پیدا کنیم که نسبت به این سه دهکده، فاصله‌ای برابر داشته باشد.

ساحل: من فکر می‌کنم اول باید نقطه‌ای را پیدا کنیم که از دو دهکده به یک فاصله باشد. فکر می‌کنم این مسئله ساده‌تر است.

دریا: درست است؛ بنابراین، مسئله‌ی جدید ما این است که چه نقطه‌هایی از دو دهکده‌ی خیام و بیرونی، فاصله‌ای برابر دارند؟



ساحل: فهمیدم؛ ما می‌توانیم این دو نقطه را دو سر یک پاره‌خط فرض کنیم. در این صورت، تمام نقطه‌هایی که روی عمودمنصف این پاره‌خط قرار دارند، جواب مسئله هستند.

او سپس عمودمنصف BA را رسم کرد.

دریا: اما این که بی‌نهایت نقطه به دست می‌دهد!

ساحل: من همیشه از بی‌نهایت می‌ترسیدم!

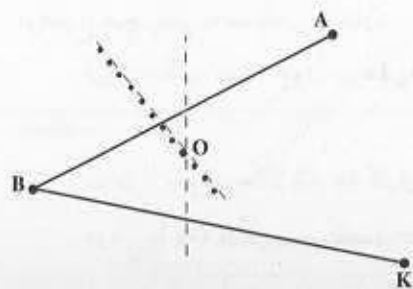
دریا: ما به دنبال نقطه‌ای هستیم که از دهکده‌ی

سوم هم همان فاصله را داشته باشد.

ساحل: خوب، عمودمنصف BK را هم رسم

می‌کنیم. چون نقاط آن از دو نقطه‌ی B و K به یک فاصله است.

او سپس عمودمنصف BK را رسم کرد.



دریا: چه اتفاق جالبی! کار تمام است. چون محل برخورد دو عمود منصف، درواقع از سه رأس به یک فاصله است؛ یعنی، عمود منصف BK نیز از نقطه‌ی O می‌گذرد.

دریا و ساحل مسئله را حل کردند اما از نظر دقت ریاضی، یک نکته‌ی بسیار ظریف پنهان مانده است. این استدلال وقتی کاملاً دقیق است که به این سؤال پاسخ داده باشیم: اگر شکل طوری باشد که دو عمود منصف هم‌دیگر را قطع نکنند، پاسخ مسئله چگونه خواهد بود؟ آیا اساساً چنین وضعی، می‌تواند اتفاق بیفتد؟

مسئله‌ی ۴: اکنون که نقطه‌ای پیدا کرده‌ایم که از سه دهکده فاصله برابر دارند، آیا مجموع فاصله‌های این نقطه تا دهکده‌ها کم‌ترین مقدار ممکن (کوته‌ترین) است؟

بزرگراه‌ها

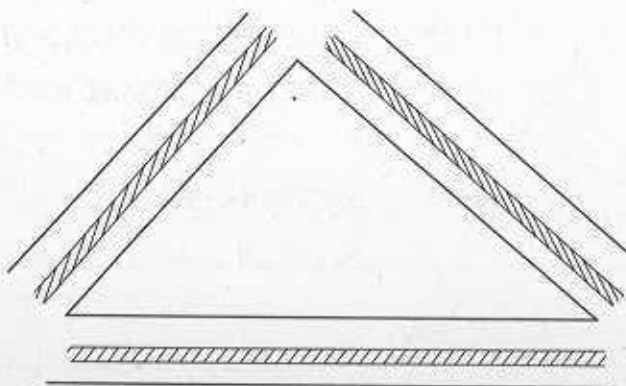
سه بزرگراه با یک دیگر تلاقی دارند؛ به طوری که زمین مثلث شکلی بین آن‌ها ایجاد شده است. قرار است کارخانه‌ای در این زمین احداث شود. از نظر اقتصادی بهترین مکان احداث کارخانه جایی است که از نظر دسترسی کارخانه به بزرگراه‌ها یک‌سان باشد، یعنی، فاصله‌ی کارخانه تا بزرگراه‌ها برابر و کم‌ترین مقدار ممکن باشد. بهترین مکان احداث کارخانه را پیدا کنید.

مسئله‌ها را به مبارزه بطلبید. این مبارزه‌های فکری باعث شکوفایی توانایی‌های ذهنی می‌شوند. این فرصت‌ها را به خود اختصاص دهید. نیلوفر و پروانه روی این مسئله کار کردند و پس از پایان کار، جریان فکری خودشان را به صورت زیر گزارش دادند.

نیلوفر: فکر می‌کنم رسم یک شکل کمک خوبی برای درک مسئله و وضعیت بزرگراه‌ها و کارخانه باشد.

پروانه: من هم موافقم.

سپس شکلی تقریبی برای مسئله رسم کرد.



نیلوفر: خیلی خوب شد. به نظر می‌رسد همان مثلث داخلی شکل، برای ما بس باشد.

پروانه: بعدش باید چه کار کنیم؟

نیلوفر: واضح است که محل کارخانه باید داخل این مثلث باشد.

پروانه: روی ضلع‌ها چه طور؟

نیلوفر: نمی‌دانم، باید یک بار دیگر صورت مسئله را با دقت بخوانیم.

نیلوفر: در صورت مسئله گفته شده که فاصله از سه بزرگراه، برابر باشد؛ بنابراین، محل

کارخانه نمی‌تواند روی ضلع باشد.

پروانه: فاصله از بزرگراه برای من واضح نیست.

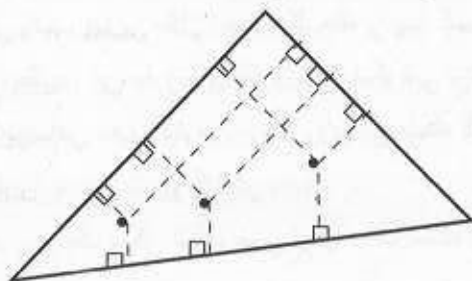
نیلوفر: در حالت کلی، فاصله‌ی یک نقطه از یک خط یعنی اندازه‌ی عمودی که از آن نقطه بر

خط رسم شود.

پروانه: یک بار دیگر صورت مسئله را با هم مرور می‌کنیم. ما باید نقطه‌ای را پیدا کنیم که از

سه ضلع، به یک فاصله باشد. بهتر است روش حدس و آزمایش را در پیش بگیریم.

نیلوفر: باید یک جایی در وسط شکل باشد.



پروانه: با این روش به جایی نمی‌رسیم. من فکر می‌کنم راه کار زیر مسئله‌ها کمک می‌کند.

نیلوفر: فهمیدم؛ اگر یک نقطه از سه ضلع به یک فاصله باشد، باید از دو ضلع هم به یک

فاصله باشد؛ بنابراین، باید روی نیمساز زاویه‌ی بین آن دو ضلع باشد!

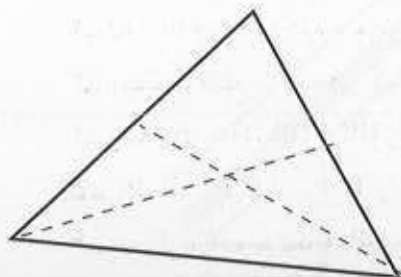
پروانه: احساس من این بود که این مسئله به

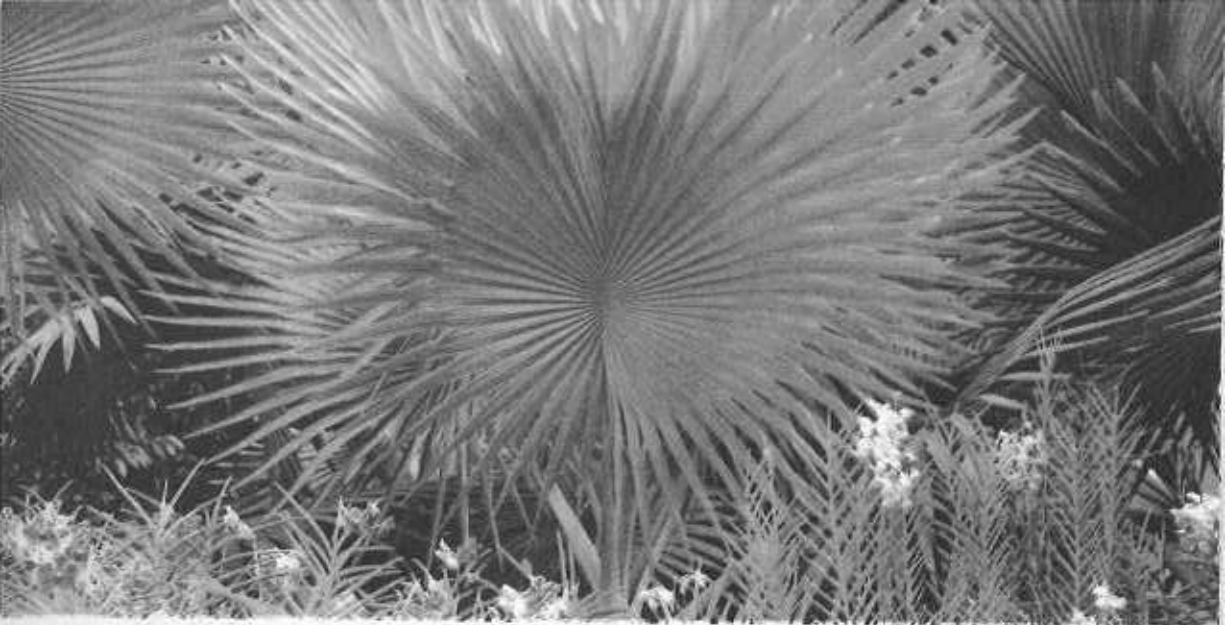
نیمسازها مربوط است. بهتر است نیمسازها را رسم

کنیم ببینیم چه اتفاقی می‌افتد. (مثلث و دو نیمساز را

دوباره رسم کرد)

نیلوفر: مسئله حل شده است.

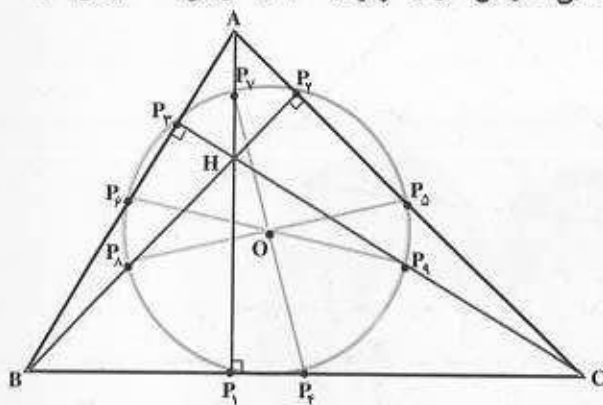




دایره‌ی نه نقطه

در سال ۱۸۲۰ میلادی، دو ریاضی‌دان فرانسوی به نام‌های پریانسان^۱ و پونسله^۲ مقاله‌ای منتشر کردند و در آن، ادعای زیر را به اثبات رساندند: «دایره‌ای که از پای ارتفاع‌های یک مثلث می‌گذرد، از وسط سه ضلع مثلث و از وسط پاره‌خط‌هایی که رأس‌ها را به مرکز ارتفاعیه وصل می‌کنند نیز می‌گذرد»

این دایره به دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث موسوم است. دایره‌ی نه نقطه‌ی یک مثلث را با پی‌گیری گام‌های زیر رسم کنید.



- ۱- یک مثلث ABC رسم کنید؛
- ۲- سه ارتفاع را رسم کنید و مرکز ارتفاعیه را H و پای ارتفاع‌ها را P_1 ، P_2 و P_3 بنامید؛
- ۳- وسط سه ضلع را مشخص کنید و آن‌ها را P_4 ، P_5 و P_6 بنامید؛
- ۴- وسط‌های HA، HB و HC را مشخص کنید و آن‌ها را P_7 ، P_8 و P_9 بنامید؛
- ۵- P_4P_7 ، P_5P_8 و P_6P_9 را رسم کنید؛ این سه پاره‌خط در یک نقطه (O) هم‌رسانند؛
- ۶- به مرکز «O» و به شعاع OP_1 دایره‌ی نه نقطه را رسم کنید.

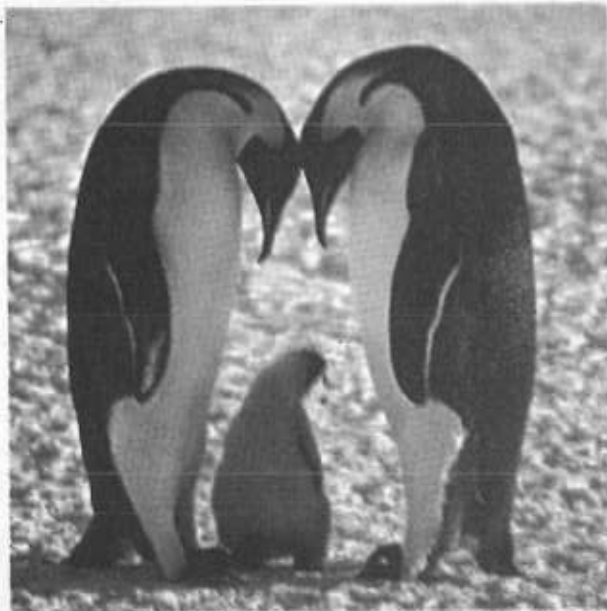
۱. Charles Brianchon (1785-1864)

۲. Jean victor poncelet (1788-1867)



مسئله‌ها

۱. در یک مثلث دلخواه، طوری یک مثلث در آن محاط می‌کنیم که هر رأس آن روی یک ضلع مثلث واقع شود. ثابت کنید این مثلث وقتی کمترین محیط را دارد که سه رأس آن پای ارتفاع‌های مثلث اولیه باشند.
۲. اگر کسی بخواهد از نقطه‌ای در یک طرف رودخانه به نقطه‌ای در طرف دیگر رودخانه با کمترین زمان برود، با توجه به اینکه سرعت او در خشکی و آب متفاوت است، مسیر او چه شکلی پیدا می‌کند؟ از سرعت آب رودخانه صرف‌نظر کنید.
۳. مورچه‌ای می‌خواهد روی یک مکعب از یک رأس به رأس مقابل آن برود. کوتاه‌ترین مسیر برای طی این راه چه شکلی دارد؟
۴. اگر بخواهیم روی کره‌ای از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر حرکت کنیم، کوتاه‌ترین مسیر به چه شکلی است؟ مسئله‌ی زن شیردوش را روی سطح یک کره حل کنید.

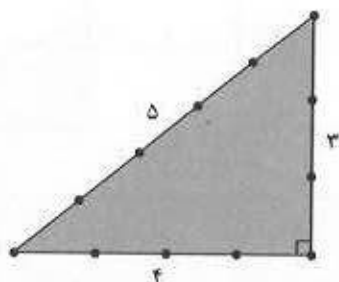


فکر می‌کنید این پنگوئن‌ها به فرزندشان چه چیزی یاد می‌دهند؟



قضیه ی فیثاغورس تمپر منتشره
در یونان، ۱۹۵۵

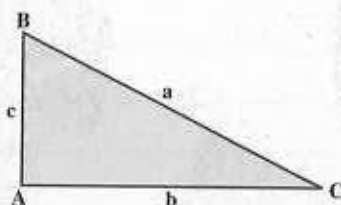
۳-۴- قضیه ی فیثاغورس و اثبات های بدون کلام!
فیثاغورس از ریاضی دانان یونان باستان، در زمینه های گوناگون علوم و ریاضیات از خود آثاری به جا گذاشته است، اما بیش از همه، به خاطر یک قضیه ی هندسی شهرت دارد. از زمان های قدیم، این نکته که اگر مثلثی اضلاعی برابر ۳، ۴ و ۵ واحد داشته باشد، مثلثی قائم الزاویه است، شناخته شده بود.



در واقع، داریم: $5^2 = 3^2 + 4^2$ ، فیثاغورس این نکته را به عنوان یک ویژگی مثلث قائم الزاویه، به طور کلی دریافت و ارائه کرد.

قضیه ی فیثاغورس: در هر مثلث قائم الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع های دو ضلع دیگر.

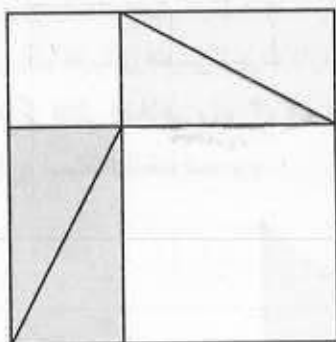
به عبارت دیگر، در هر مثلث قائم الزاویه ی ABC اگر اضلاع را با a، b و c نشان دهیم، داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$


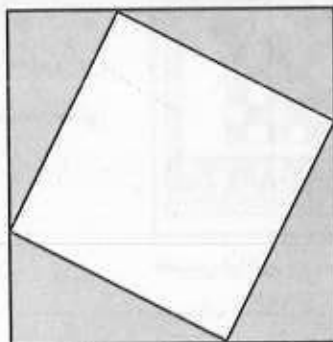
اهمیت و زیبایی قضیه ی فیثاغورس در اثبات های گوناگونی که از دوران کهن تا کنون برای آن ارائه شده است، بیش تر آشکار می گردد. در بعضی اثبات های این قضیه، از کمک تصاویر و شکل ها استفاده شده است. در این جا نمونه ای از اثبات های تصویری و بدون کلام را مطرح می کنیم که مربوط

به ۲۲۰۰ سال قبل است.

۱- اثبات تصویری: این دو شکل یک اثبات کامل برای قضیه فیثاغورس هستند. هر دو



ب



الف

مربع بزرگ برابر هستند. در شکل (الف) یک مربع در وسط واقع است و چهار مثلث قائم الزاویه‌ی یک‌سان در گوشه‌های مربع بزرگ واقع هستند. مربع وسط (سفیدرنگ) مربعی است که روی وتر مثلث‌های قائم الزاویه ساخته شده است. در شکل (ب)، دو مربع سفیدرنگ، یکی روی ضلع کوچک زاویه قائمه و دیگری روی ضلع دیگر زاویه قائمه ساخته شده است؛ بنابراین، بر اساس این دو شکل، داریم:

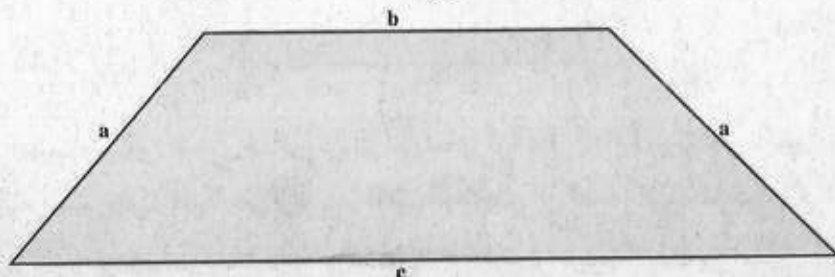
$$\left(\text{مربع روی وتر مثلث} \right) + \left(\text{چهار مثلث} \right) = \left(\text{مربع کوچک روی ضلع کوچک زاویه قائمه} \right) + \left(\text{مربع متوسط روی ضلع بزرگ زاویه قائمه} \right) + \left(\text{چهار مثلث} \right)$$

در نتیجه:

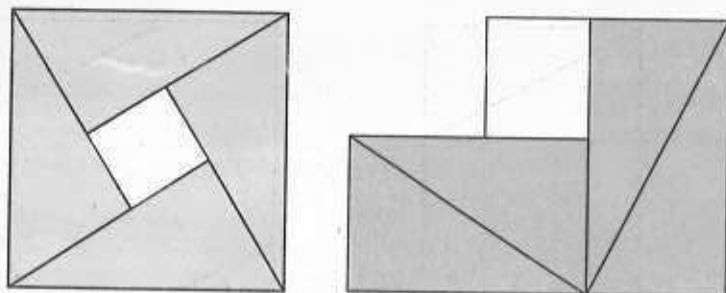
$$\text{مربع روی وتر} = \text{مربع کوچک} + \text{مربع متوسط}$$

مسئله ۴: شکل زیر یک دوزنقه‌ی متساوی الساقین است.

مساحت دوزنقه را بر حسب طول اضلاع آن به دست آورید.



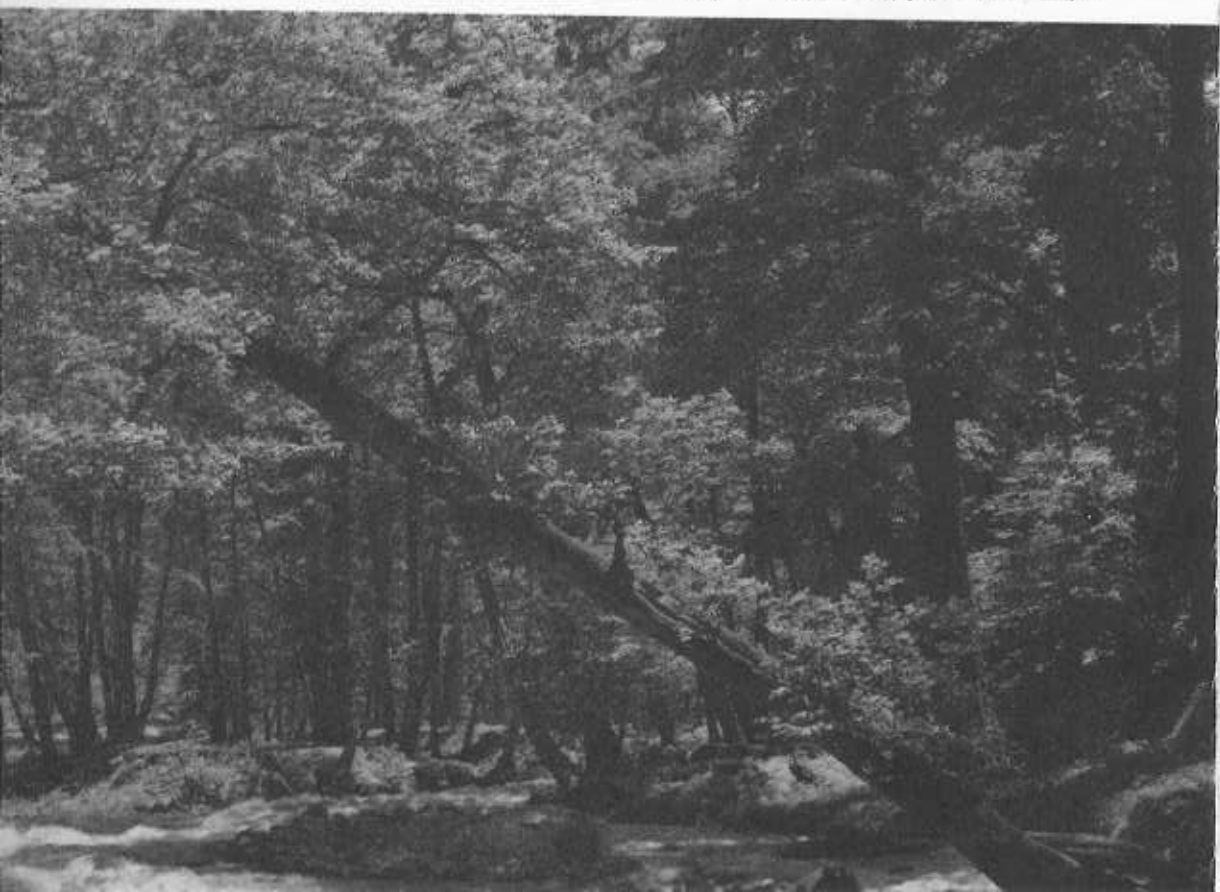
مسئله ۵: شکل های زیر، اثبات دیگری برای قضیه فیثاغورس ارائه می کنند. این اثبات را به طور دقیق توصیف کنید.



عکس قضیه فیثاغورس نیز صادق است؛ یعنی اگر در یک مثلث، مربع یک ضلع برابر مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد، آن گاه آن مثلث، قائم الزاویه است. در مورد ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه نتیجه مهم دیگری وجود دارد که به آن می پردازیم.

ارتفاع وارد بر وتر

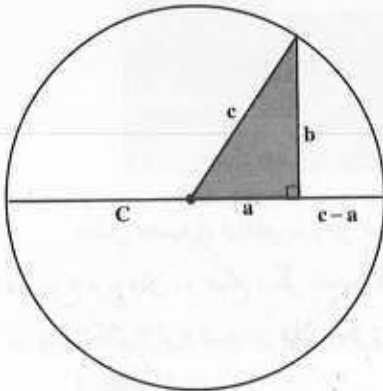
در مثلث قائم الزاویه ABC ، ارتفاع وارد بر وتر را رسم کنید و بین ارتفاع و پاره خط های ایجاد شده روی وتر رابطه ای را جست و جو کنید.



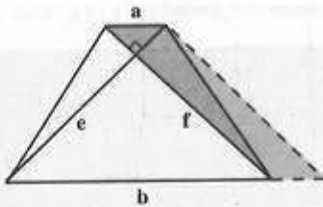


مسئله‌ها

۱. به کمک شکل روبه‌رو، اثبات دیگری برای قضیه فیثاغورس ارائه کنید.



۲. در یک دوزنقه، اندازه‌های قاعده‌ی کوچک «a»، قاعده‌ی بزرگ «b» و قطرهای «e» و «f» است. ثابت کنید اگر قطرهای هر دو عمود باشند؛ آن‌گاه:

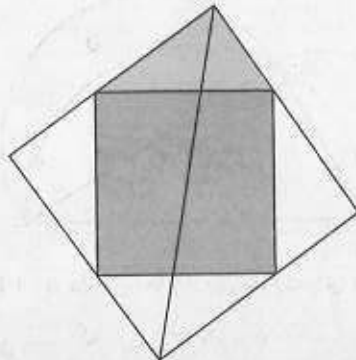


$$(a+b)^2 = e^2 + f^2$$

آیا عکس این حکم نیز برقرار است؟
راهنمایی: شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید.

۳. اثبات بدون کلام و به وسیله‌ی تصویر:

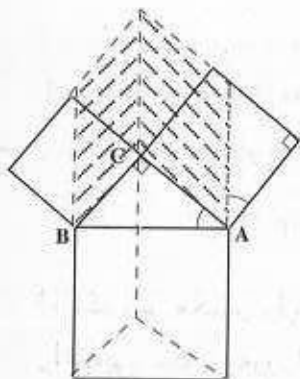
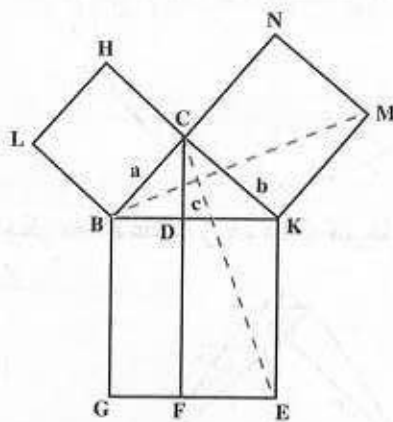
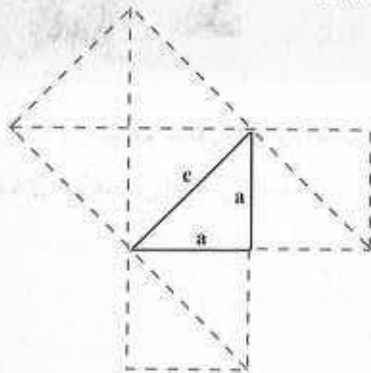
در هر مثلث قائم‌الزاویه نیمساز زاویه‌ی قائمه، مربعی را که روی وتر بنا شده است، نصف می‌کند.



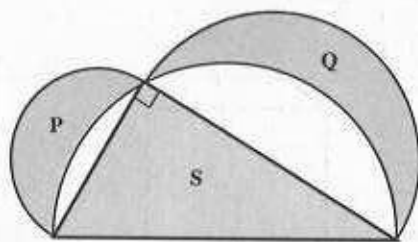
اثبات را به طور واضح و دقیق توضیح دهید.

۴. مکعب مستطیلی به ابعاد a ، b و c داده شده است. قطر این مکعب را بر حسب a ، b و c محاسبه کنید.

۵. هر یک از شکل های زیر نمایانگر چه حقیقتی است؟



۶. در شکل زیر ثابت کنید $S = P + Q$.



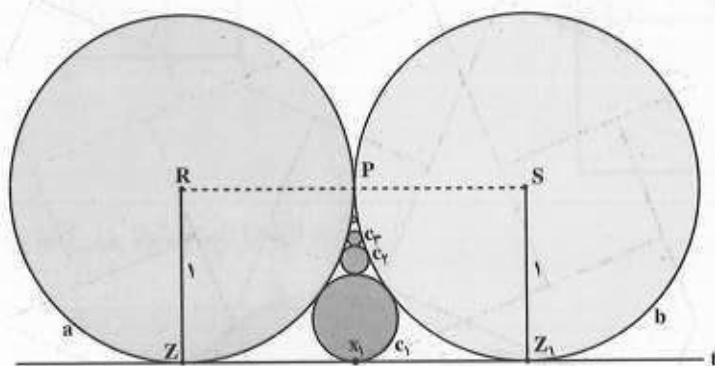
۷. معادله $a^2 + b^2 = c^2$ دارای خانواده ی جواب های صحیح به شکل $K(m^2 + n^2)$ و $K(m^2 - n^2)$ می باشد که در آن a ، b ، c و k اعدادی صحیح هستند. از معادله ی $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ استفاده کنید و نشان دهید هر جوابی به این صورت است.

۸. درختی را در نظر بگیرید که تنه‌ی آن به دو شاخه تبدیل شده است. اگر قطر تنه‌ی درخت را با قطرهای دو شاخه‌ای که از آن منشعب می‌شوند اندازه بگیرید خواهید دید که این سه عدد تقریباً یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند. می‌توانید خودتان آزمایش کنید. این نکته را چگونه توجیه می‌کنید؟
۹. حاصل جمع (سری) زیر را تقریب بزنید. آیا فکر می‌کنید می‌توان حاصل جمع آن را به‌طور دقیق به‌دست آورد؟

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots$$

اگر با دردرس رویه‌رو شدید به حل مسئله‌ی بعدی بپردازید.

۱۰. دایره‌های C_1 به مرکز R و C_2 به مرکز S در نقطه‌ی P مماس هستند. مماس مشترک آن‌ها را رسم می‌کنیم و نقاط تماس را T_1 و T_2 می‌نامیم (شکل زیر).



فرایند ساختن دایره‌های مماس بر C_1 و C_2 که در آن $k=1,2,3,\dots$ است می‌تواند بی‌پایان ادامه یابد! قطرهای $d_1, d_2, d_3, \dots$ به ترتیب مربوط به دایره‌های $D_1, D_2, D_3, \dots$ یک دنباله عددی نامتناهی تشکیل می‌دهند. تعریف می‌کنیم:

$$S_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

$$S_1 < S_2 < S_3 < \dots$$

آن‌گاه،

بدیهی است که برای هر n ,

$$S_n \leq PX_1$$

چون PX_1 برابر شعاع دایره است بنابراین وقتی n به سمت بی نهایت برود، S_n به سمت ۱

خواهد رفت؛ یعنی

$$d_1 + d_2 + d_3 + \dots = 1$$

جمله‌های دنباله عددی $d_1, d_2, d_3, \dots$ را محاسبه کنید و جمله‌ی عمومی این دنباله را

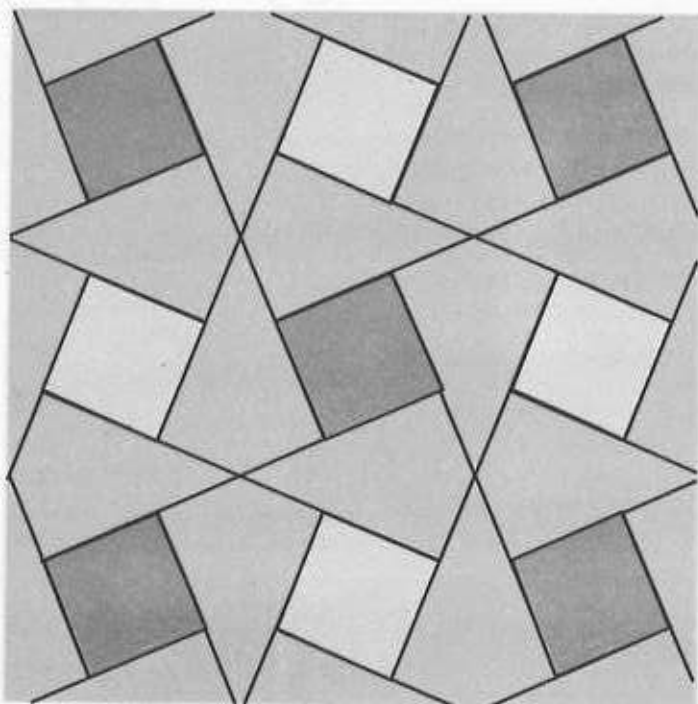
به دست آورید.

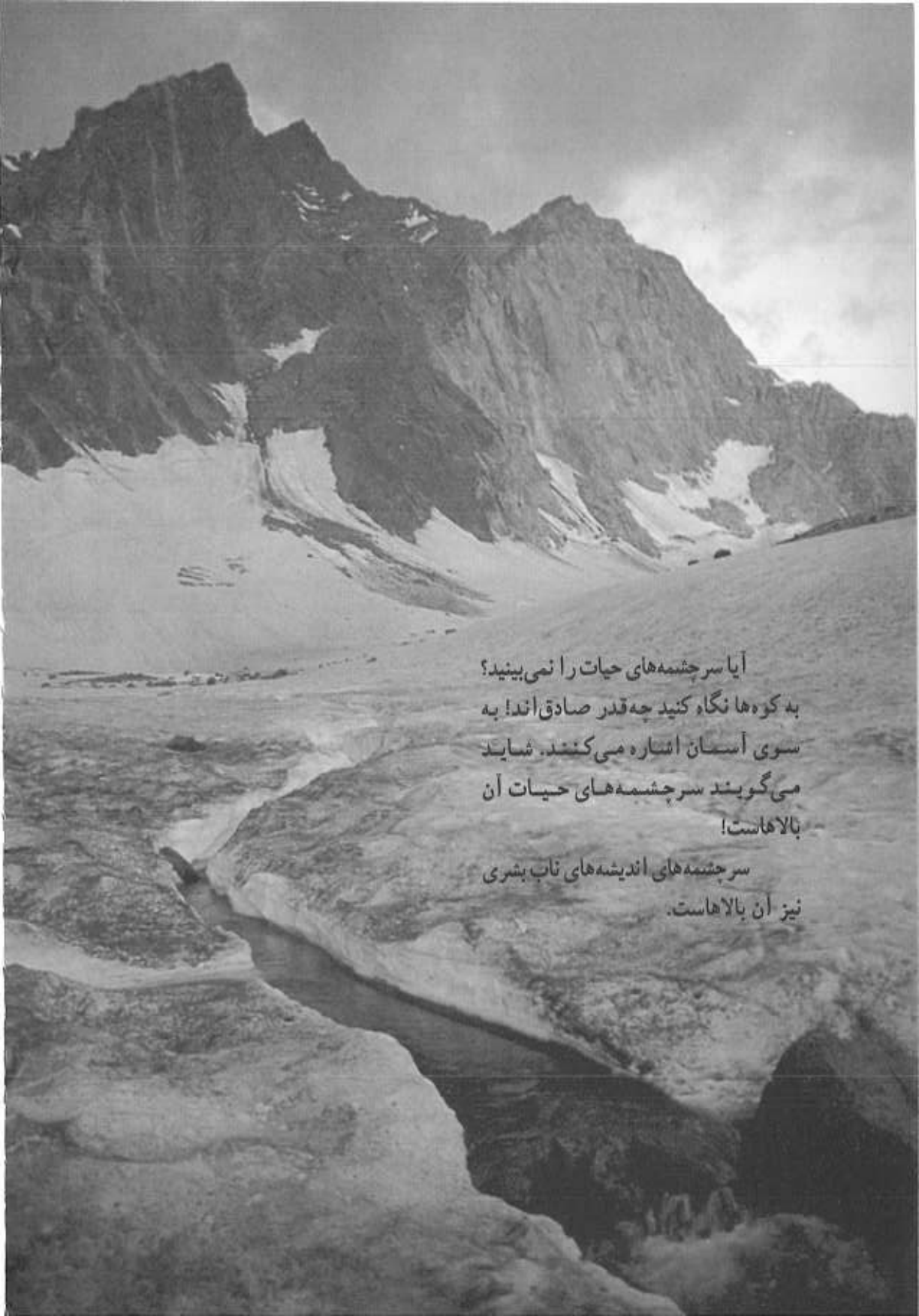
پس از حل این مسئله به مسئله‌ی قبل بازگردید!

۱۱. در شکل زیر یک طرح ایرانی که از مربع و مثلث‌های قائم‌الزاویه (!) ساخته شده است

ملاحظه می‌کنید. به کمک مثلث قائم‌الزاویه و مربع‌های روی اضلاع آن طرح‌هایی برای کاشی‌کاری

بسازید.





آیا سرچشمه‌های حیات را نمی‌بینید؟
به کوه‌ها نگاه کنید چه قدر صادق‌اند! به
سوی آسمان اشاره می‌کنند. شاید
می‌گویند سرچشمه‌های حیات آن
بالاهاست!

سرچشمه‌های اندیشه‌های ناب بشری
نیز آن بالاهاست.

روش‌های جبری و الگوهای هندسی در نابرابری‌ها

سرزمین‌های پهناور ریاضیات پُر از شگفتی‌هاست. هرچه به شناخت آن بیش‌تر همت کنیم به شگفتی‌ها و اسرار بیش‌تری پی می‌بریم. تاکنون بیش‌تر با برابری‌ها (تساوی‌ها، اتحادها، معادله‌ها) آشنا شده‌ایم با این حال وقتی اهمیت و ارزش برابری‌ها را بیش‌تر و عمیق‌تر درک می‌کنیم که نابرابری‌ها را هم بشناسیم!

نابرابری‌ها در همه‌ی سرزمین‌های ریاضیات وجود دارند و بسیار با اهمیت هستند. حتی گاهی از برابری‌ها مهم‌ترند. به کوهستان‌ها که بنگریم سرآغاز آب‌های زلال را مشاهده می‌کنیم. آب‌هایی که اندک‌اندک به رودخانه‌های بزرگ تبدیل می‌شوند و موجب حیات موجودات زنده و حاصل‌خیزی و سرسبزی دشت‌ها و جلگه‌ها می‌شوند. این پدیده‌ی طبیعی، از یک منظر همانند جریان اندیشه‌ی بشری است! درباره‌ی آن بیندیشید!

به پیدایش و سرگذشت ایده‌های ریاضی که می‌نگریم، نابرابری‌ها را از دوران کهن مشاهده می‌کنیم. روز تولد اولین نابرابری نامعلوم است! احتمال می‌رود با پیدایش برابری‌ها هم‌زمان باشد! با حرکت در بستر تاریخ اندیشه‌ها و موجودات ریاضی ابتدا به روش‌های هندسی برمی‌خوریم و پس از دوران‌هایی با روش‌های جبری روبه‌رو می‌شویم. ایده‌ی به‌کارگیری روش‌های جبری برای حل مسایل هندسی، شاهکار نام‌آوران ریاضی ایران‌زمین است. خیام و خوارزمی و کتاب‌هایشان درباره‌ی جبر که در دوره‌ی شکوفایی تمدن اسلامی سرآمد ریاضیدانان شدند، مبتکر و توسعه‌دهنده‌ی روش‌های جبری بودند و ما به آنان افتخار می‌کنیم. روش‌های جبری و هندسی نقش اساسی در شناخت نابرابری‌ها دارند.

علوم کاربردی و مهندسی سراسر بهره‌مند از نابرابری‌ها هستند. محاسبات مهندسی غالباً با تقریب سر و کار دارند. نابرابری‌ها و خواص آن‌ها از ابزار اصلی تقریب‌زدن‌ها می‌باشد در درون علم ریاضی نیز، نابرابری‌ها به‌طور اعجاب‌آوری به توسعه‌ی نظریه‌ها و حل مسایل کمک می‌کنند و در بسیاری موارد نابرابری‌ها برای شناخت و نزدیک‌شدن به موجودات شگفت‌انگیز ریاضی نقش حیاتی دارند. اکنون که چنین است سفری به سرزمین نابرابری‌ها می‌کنیم.

۴-۱- یک موجود شگفت انگیز!

فکرش را آزار می داد؛ نمی توانست از دستش خلاص شود. هر بار که به یادش می افتاد، کنجکاویش بیش تر می شد. دلش می خواست بداند (تمایل به دانستن از ویژگی های ذاتی انسان است). اولین بار در دوران دبستان با این سؤال روبه رو شده بود... عددی بین ۳ و ۴ است؛ تقریباً برابر $3/14$ است! اما $3/14$ نیست! این چه عددی است که ما نمی توانیم آن را بشناسیم؟ مگر عددها چه هستند؟ پیش تر که فکر می کرد، یادش می آمد که اولین بار در درس محیط دایره با این مسئله برخورد کرده بود. قانون زیر را همواره به خاطر داشت:

$$\frac{\text{اندازه ی محیط دایره}}{\text{اندازه ی قطر همان دایره}} = \text{عددی بین ۳ و ۴ (تقریباً } 3/14 \text{)}$$

هر سال که معلم ریاضی جدید می آمد، در یک فرصت مناسب این نکته را از او سؤال می کرد. از اطرافیان هم پرسیده بود اما پاسخ هایی که می شنید قانعش نمی کرد. بعضی از پاسخ ها این گونه بودند: «همان عدد پی را می گویی؟» «سه عدد صحیح و چهارده صدم است!» «تقریباً $3/14$ است» و ...



حالا سال جدید بود و او به کلاس بالاتر آمده بود. معلم درس ریاضی نیز جدید بود. از رفتار مهربانانه ی معلم دریافت که می تواند در شروع درس، سؤالش را مطرح کند. خیلی زود احساس

کرد که معلم بسیار با هوش است و در سخنانش از طنز هم استفاده می کند. پس سؤالش را مطرح کرد.
معلم پاسخ داد: عددی گنگ است!

هوشمند: عدد گنگ دیگر چه عددی است؟ گنگ یعنی چه؟

معلم: یعنی لال است! نمی شنود!

هوشمند: مگر بقیه ی عددها حرف می زنند؟

معلم: بله، عددهای طبیعی، طبیعی حرف می زنند! عددهای صحیح، درست حرف می زنند!

البته بعضی هایشان منفی بافی می کنند! عددهای گویا هم گویا هستند اما عددهای دیگری وجود دارند که لال هستند! زبانشان بسته است!

هوشمند: پس به همین دلیل ما نمی توانیم آن ها را مثل بقیه زود بشناسیم.

معلم: آفرین! خوب فهمیدی.

هوشمند: آن ها که نمی توانند خودشان را معرفی کنند! پس چه طور می شود آن ها را شناخت؟

راهش چیست؟

معلم: خیلی در دسر دارد! اول باید با آن ها دوست بشوید!

هوشمند: چه طور؟

معلم: بهتر است سرگذشت و زندگی آن ها را بررسی کنید و ببینید تاکنون چه کسانی با آن ها

دوست شده اند و چگونه توانسته اند این کار را انجام دهند.

البته شرط موفقیت این است که آن ها را دوست داشته باشید و کارهای خوبی برای آن ها انجام

بدهید! یادتان باشد آن هایی که لال هستند خیلی عمیق، پیچیده و شگفت انگیز هستند. شاید نتوان آن ها

را کاملاً شناخت اما می شود خیلی به آن ها نزدیک شد! حواست جمع باشد که آن ها خیلی نازک دل

هستند!

در این جا معلم گفت اگر همه موافق باشید، با یکی از این زبان بسته ها دوست می شویم! بهتر

است با قدیمی ترین آن ها شروع کنیم.

ما واقعاً اولین مردمانی که این کار را انجام داده اند، نمی شناسیم اما در دوران قدیم این کار را

به طور تجربی انجام می دادند. شاید یک تکه نخ نازک به دور دایره ای می کشیدند و طول آن را اندازه

می گرفتند و سپس قطر را هم با نخ اندازه می گرفتند! دست آخر نسبت آن ها را به دست می آوردند.

این اولین گام است. این کار را انجام دهید. چند شکل یا جسم دایره ای شکل را تجربه کنید. هر بار

سعی کنید دقیق تر اندازه گیری کنید. این کار را دست کم نگیرید، وگرنه نمی توانید با آن ها دوست

شوید.

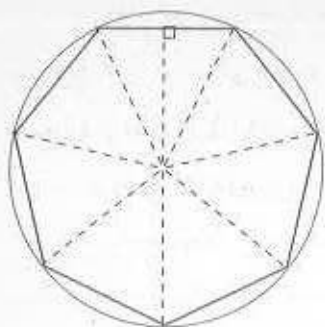
در سند پاپیروس رابند که مربوط به مردمان مصر باستان (۱۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح (ع)) است، مقدار $(\frac{16}{9})^2$ برای عدد π ثبت شده است. در هند باستان نیز در حدود ۸۰۰ سال قبل از میلاد مسیح (ع) برهمگوپته تا $\sqrt{10}$ به π نزدیک شد. قصد نداریم در مورد همه‌ی کسانی که در گذشته با این موجود زبان‌بسته (π) دوست شده‌اند، تحقیق کنیم. در گذشته دو نفر که خیلی هم باهوش بوده‌اند، توانسته‌اند دوست بسیار صمیمی π بشوند و خیلی بیش‌تر از دیگران او را بشناسند. ارشمیدس برای شناخت بیش‌تر این عدد روشی هوشمندانه برگزید.



ارشمیدس (از ۲۱۲ تا ۲۷۸ م.)

یکی از بزرگ‌ترین ریاضی‌دانان همه‌ی اعصار، و به یقین بزرگ‌ترین آنان در عهد عتیق، ارشمیدس، از اهالی شهر یونانی سیراکوز در جزیره‌ی سیسیل بوده است. گویند که در هنگام مرگ بر روی شن‌های ساحل در حال حل مسئله‌ی ریاضی بوده است. او شکل‌های هندسی را روی شن‌ها ترسیم می‌کرده است! ساخت آینه‌های «کاو» که به وسیله‌ی آن‌ها نیمی از کشتی‌های رومیان را نابود کرد! منجنیق‌های پرتاب سنگ! چرنقیل‌های جنگال‌دار بزرگی که کشتی‌های دشمن را از روی آب بلند می‌کردند! و آناری درباری اندازه‌گیری دایره، تربیع سهمی، مارپیچ‌ها، تعادل‌های مسطح، اجسام شناور، همگی نشان از خلاقیتی شگرف و دقت در استدلال و مهارت در محاسبه است.

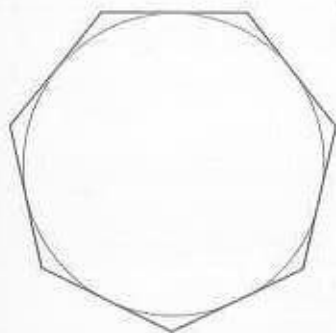
راهکار او به این ترتیب بود :



الف - محیط دایره را به n قسمت مساوی تقسیم کنید و یک n ضلعی منتظم در داخل آن رسم کنید ؛ به طوری که همه ی رأس ها روی دایره قرار داشته باشند (محاطی). محیط این n ضلعی منتظم را I_n بنامید.

مسئله ی ۱: I_n را محاسبه کنید.

ب - از هر کدام از n نقطه ی روی این دایره که به فاصله ی مساوی قرار دارند، مماسی رسم کنید. این مماس ها یک n ضلعی منتظم (محیطی) به وجود می آورند که هر ضلع آن بر دایره مماس است. محیط این n ضلعی را C_n بنامید.

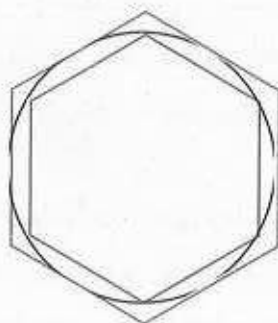
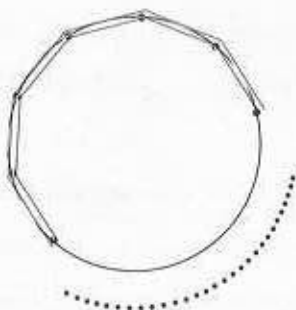


مسئله ی ۲: C_n را محاسبه کنید.

ارشمیدس از این حقیقت استفاده کرد :

$$I_n \leq \text{محیط دایره} \leq C_n$$

او با افزایش n سعی کرد که $C_n - I_n$ را کوچک کند.



ارشمیدس بر اساس همین نابرابری ها تا ۹۶ ضلعی پیش رفت و نتیجه گرفت :

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

$$3/14083 < \pi < 3/14285$$

یا تقریباً :

مسئله ۳: شاید خیال کنید ارشمیدس کار مهمی انجام نداده است. کاری ندارد! شروع کنید: n را ۶،۵،۴،۳،۲ بگیرید و π را تقریب بزنید. بد نیست کمی ادامه دهید. شاید کم کم متوجه شوید که این زبان بسته چه قدر شگفت انگیز است!

راستی چرا ارشمیدس ۹۶ ضلعی را انتخاب کرد؟ عددی مثل ۱۰۰ سراسر تر نیست؟ می توانید بفهمید؛ البته با کمی فکر و زحمت. شاید هم لذت! اگر لذت بیش تر می خواهید، مسئله ی بعدی را حل کنید.

مسئله ۴: با توجه به نام گذاری هایی که انجام شده ثابت کنید:

$$C_{2n} = \frac{2C_n I_n}{C_n + I_n} \quad (\text{الف})$$

$$I_{2n} = \sqrt{I_n \times C_n} \quad (\text{ب})$$

فرصت پیش روی شماست؛ زمان زورآزمایی فکری است! آن را از دست ندهید.

تا حدود ۱۸۰۰ سال موفقیت های چندانی برای شناخت بیش تر π حاصل نشد. البته یکی دو دانشمند چینی به پیشرفت هایی نایل شدند و توانستند نابرابری زیر را به دست آورند.

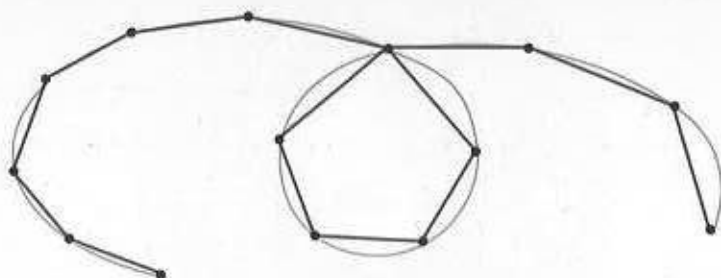
$$3/1415926 < \pi < 3/1415927$$

دومین تیزهوشی که در سرگذشت این موجود گنگ رکوردشکنی کرد، غیاث الدین جمشید کاشانی از نام آوران ریاضی ایران زمین بود. او که در قرن چهاردهم میلادی می زیست، توانست به π بسیار نزدیک تر شود و این موجود گنگ را خیلی بیش تر بشناسد. او در کتاب رساله ی محیطیه به کمک 805306368 ضلعی منتظم π را تا ۱۶ رقم اعشار محاسبه کرد! کاشانی در این رکوردشکنی، دوست سال بی رقیب بود.

شاید شناخت عدد گنگ π از اولین سرچشمه ها و خاستگاه های مفهوم نابرابری در دنیای ریاضیات باشد. جالب این است که روش همه ی کارها در دوران باستان هندسی بوده است! در آن دوران، محیط دایره را با چندضلعی ها تقریب می زدند. این ایده در جای جای دشت های ریاضیات حضور دارد! این ایده از یک منظر بسیار ساده است و از منظری دیگر بسیار کارساز.



منحنی زیر را در نظر بگیرید.



اگر بخواهید طول آن را محاسبه کنید، شاید با مشکل مواجه شوید یا نتوانید آن را به طور دقیق حساب کنید. برای مثال بیضی یکی از این گونه منحنی هاست. فکر می کنید می توان محیط بیضی را



به طور دقیق حساب کرد؟ پاسخ منفی است اما می توانید تعدادی نقطه روی آن در نظر بگیرید و این نقاط را با پاره خط ها به هم وصل کنید جمع طول این پاره خط ها یک تقریب از طول منحنی است. چگونه می توان آن را بهتر کرد؟

تقریب زدن و محاسبه ی خطا که با نابرابری ها سر و کار دارد، در ریاضیات به یک نظریه تبدیل شده است.

کار نزدیک شدن به این موجود شگفت انگیز با پدیدار شدن روش های جبری سرعت بیش تری گرفت، طوری که از قرن هفدهم به بعد سر و کله ی برابری های زیر برای محاسبه π پیدا شد :

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots;$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots;$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

شاید بیش تر باور کرده باشید این موجود زبان بسته شگفت انگیز و باور نکردنی است. طرف دوم



غیاث الدین جمشید کاشانی

غیاث الدین جمشید کاشانی ریاضیدان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود سال ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. وی از نوابع ریاضی قرن نهم محبوب می‌شود و یکی از کارهای مهم او این است که عدد π نسبت محیط دایره به قطر آن را با دقتی که تقریباً یکصد و پنجاه سال بعد از وی در دنیای رقیب مانند محاسبه کرد. از کارهای مهم کاشانی در نجوم تدوین زیج خاقانی است که تکمیل نواقص زیج الیمانی آن را تهیه کرد. وی در سال ۸۱۸ ه. ق. ویله‌ی جدیدی برای رصد ستاره‌ها به نام طبق المناطق اختراع کرد و در باره‌ی چگونگی استفاده از آن و ویله‌ی دیگری که پیش از آن ساخته بود (به نام لوح الاتصالات) رساله‌ی جامع و مفیدی موسوم به نزهة المحققان نوشت. آثار معروف کاشانی عبارت است از:

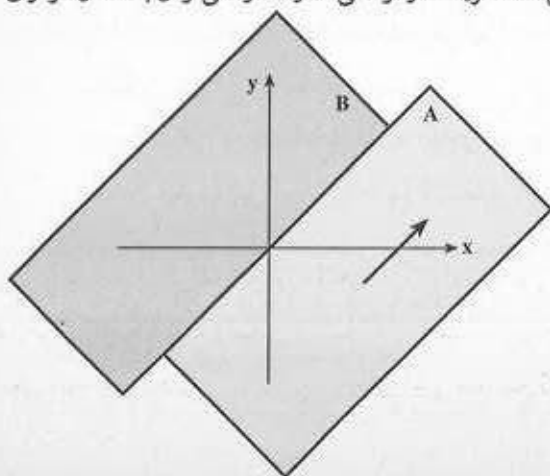
- ۱- زیج خاقانی ۲- زیج تسلیات ۳- سلم‌السماء ۴- رساله‌ی محیطیه ۵- رساله‌ی وتروجب ع- منقح الحساب
- این ریاضیدان بزرگ در سال ۸۳۲ ه. ق. در شهر قزوین وفات یافت.

برای‌ها به ما می‌گویند، اگر می‌خواهید او را واقعاً به‌طور دقیق بشناسید باید تا بی‌نهایت بروید! و این در طول عمر یک انسان ممکن نیست! اگر حوصله داشتید ماشین حساب یا کامپیوتر را روشن کنید و سعی کنید تقریب‌هایی بر اساس برابری‌های اخیر محاسبه کنید.



۴-۲- نابرابری‌های ساده (روش هندسی)

معلم یک صفحه‌ی کاغذ را به دو نیم کرد و دو نیمه را مطابق شکل روی تخته سیاه لغزاند و گفت: صفحه‌ی مختصات را در نظر بگیرید. نیمساز ناحیه‌ی اول را L بنامید. خط L مطابق شکل صفحه‌ی مختصات را به دو ناحیه‌ی A و B تقسیم می‌کند. هریک از نواحی A و B را می‌توان با انتقال موازی



خط L روی خودشان لغزاند. همین‌طور خط L را می‌توان روی خودش لغزاند. به عبارت دیگر، نواحی A ، B و خط L ، با عمل انتقال موازی خط L روی خودشان می‌لغزند. اما ناحیه‌ی دیگر را قطع نمی‌کنند. این یک حقیقت هندسی است. آیا می‌توانید معنای جبری این حقیقت را بیان کنید؟

معلم پاسخ خاصی در ذهن داشت. این مسئله ای نبود که به چندین روش بتوان آن را حل کرد. ولی او می خواست دانش آموزان با فعالیت خود پاسخ مسئله را بیابند تا آموزش آن بهتر انجام بگیرد. داود و سلیمان اولین گروهی بودند که پاسخ مناسبی به دست آوردند. گفتگوی بین این دو دانش آموز را به دقت دنبال کنید.

داود: من در مورد این مسئله احساس خوبی ندارم. نه فرض آن معلوم است و نه حکم آن و نه می دانیم دقیقاً به دنبال چه چیزی می گردیم؟ نمی دانم چه کار باید بکنیم!

سلیمان: خوب! تاکنون خیلی پیش آمده است که برای حل مسئله ای از روش جبری استفاده کنیم. در واقع، در این روش ابتدا سعی می کنیم همه ی اطلاعات را به یک معادله تبدیل کرده و بعد، آن معادله را حل کنیم. به عبارت دیگر، این روش مثل یک واژه نامه است و مسئله ی ما را به زبان دیگری ترجمه می کند. مسئله را در آن زبان حل می کند. سپس نتیجه ی به دست آمده را به زبان اول ترجمه می کند.

داود: من که فکر نمی کنم ترجمه کردن باعث بشود چیزی را بهتر بفهمیم. سلیمان: اشتباه می کنی! در ریاضیات این طور است. مثلاً حل معادله ی درجه دوم باعث می شود مسائل سقوط آزاد را به راحتی حل کنیم.

داود: درست گفتی. ولی من راهی نمی بینم که بتوان لغزاندن دو ناحیه ی A و B را با یک معادله نمایش داد.

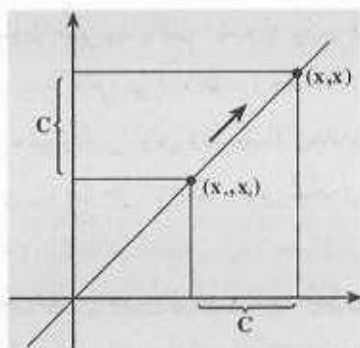
سلیمان: برای انجام دادن این کار، اول باید خود نواحی A و B را با معادله نمایش دهیم. داود: مگر نیم صفحه هم معادله دارد؟! خوب البته! چرا که نه! مثال هایی به خاطر دارم. مثلاً ناحیه ی اول را در صفحه ی مختصات با دو نابرابری $x > 0$ و $y > 0$ مشخص می کردیم و ناحیه ی دوم را با دو نابرابری $x < 0$ و $y > 0$. اگر بخواهیم برای نیم صفحه ی بالا معادله بدهیم... رابطه ی $y > 0$ نیم صفحه را کاملاً مشخص می کند. سلیمان: ولی این که معادله نیست.

داود: اشکالی ندارد؛ بالاخره یک رابطه ی جبری است که نیم صفحه ی بالا را مشخص می کند. سلیمان: خوب پس این طور! اکنون مشخص کردن معادله ی نواحی A و B کار ساده ای است. نیمساز ناحیه ی اول با خط L مشخص می شود. خط L را می توان با معادله ی $y = x$ مشخص کرد. ناحیه ی A پایین خط L قرار دارد. پس با معادله ی $y < x$ مشخص می شود. همین طور ناحیه ی B را با معادله ی $y > x$ می توان به دست آورد.

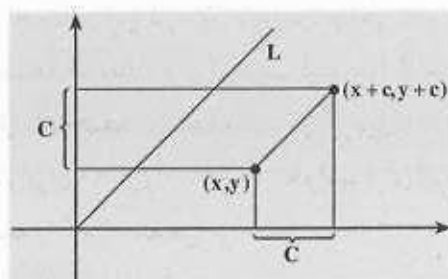
داود: بسیار خوب! می ماند این که لغزاندن را به زبان جبر ترجمه کنیم. برای مشخص کردن

معادله‌ی نواحی A و B، خط L مشکل گشا بود. بهتر است اول لغزیدن خط L روی خودش را با یک معادله‌ی جبری مشخص کنیم.

سلیمان: نباید مشکل باشد. اگر نقطه‌ی (x_0, x_0) روی L را به نقطه‌ی دیگری مثل (x, x) روی L، انتقال دهیم، هر دو مؤلفه به اندازه‌ی ثابت C بزرگ‌تر شده‌اند پس در واقع در این عمل، با لغزاندن هر نقطه (x_0, x_0) را به نقطه‌ی $(x_0 + C, x_0 + C)$ می‌بریم. یعنی، به هر دو مختصه مقدار ثابت C را اضافه می‌کنیم.



داود: بیا همین کار را با نقطه‌ای دلخواه از صفحه انجام دهیم و ببینیم چه اتفاقی می‌افتد! مثلاً فرض کنید نقطه‌ی (x, y) به نقطه‌ی $(x + C, y + C)$ برود. آیا الگویی مشاهده می‌شود؟ بهتر است یک شکل رسم کنیم.



سلیمان: درست به هدف زدی! بله! این همان انتقال موازی خط L است.

مسئله را حل کردی؛ چون حالا می‌توان لغزش A را روی خودش با این معادله‌ها توضیح داد. اگر نقطه‌ی (x, y) در ناحیه‌ی A باشد، پس از انتقال موازی خط L به نقطه‌ای مانند $(x + C, y + C)$ می‌رود. بنا بر صورت مسئله، نقطه‌ی $(x + C, y + C)$ هنوز در ناحیه‌ی A قرار دارد. اما ما می‌دانیم که نقاط (x, y) در ناحیه‌ی A با رابطه‌ای $y < x$ کاملاً مشخص می‌شوند؛ یعنی، $y < x$ اگر و فقط اگر (x, y) در ناحیه‌ی A باشد.

داود: بله! منظورت را فهمیدم. حقیقت هندسی به ما می گوید که اگر: $y < x$ ، خواهیم داشت $y + c < x + c$ ؛ زیرا نقطه‌ی $(x + c, y + c)$ هم در ناحیه‌ی A واقع است و این همان معنای جبری لغزش ناحیه‌ی A روی خودش است.

سلیمان: فقط بگذار کمی دقیق‌تر باشد. اگر اعداد حقیقی دلخواه باشند و $y < x$ آنگاه برای هر $c > 0$ خواهیم داشت $y + c < x + c$.

داود: اگر به شکل نگاه کنیم می‌بینیم که در هر دو جهت بالا و پایین می‌توان آن را لغزاند. پس لازم نیست شرط $c > 0$ را در نظر بگیریم. حالت $c < 0$ برای حرکت به سمت پایین به کار می‌رود و حالت $c = 0$ هم بدیهی است. یعنی اگر $y < x$ آنگاه $y + 0 < x + 0$.

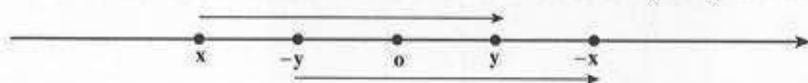
سلیمان: راست گفتی. همین کار را برای ناحیه‌ی B انجام می‌دهیم و نتیجه می‌دهد: $x < y$ ؛ آنگاه: $x + c < y + c$.

داود: حواست باشد که x, y فقط دو نمادند. حرف جدیدی نزدی بلکه همان حرف قبل را تکرار کردی. این نشان می‌دهد که یک نمایش جبری می‌تواند ترجمه‌شده‌ی حقایق هندسی متفاوتی باشد.

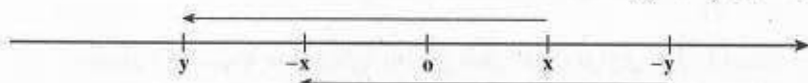
سلیمان: از نکته‌ای که به من آموختی متشکرم. بگذار ببینم آیا می‌توان از $y > x$ نتیجه بگیرم $-x > -y$. این رابطه را قبلاً می‌دانستم. می‌خواهم درستی آن را توسط همین الگوی هندسی ببینم. قبلاً برای اثبات این رابطه، آن را روی محور اعداد مقایسه و از یک جدول نظام دار استفاده می‌کردم. حالت ۱: $x > 0$ و $y > 0$ ؛ ($y > x$)



حالت ۲: $x < 0$ و $y > 0$ ؛



حالت ۳: $x > 0$ و $y < 0$ ؛

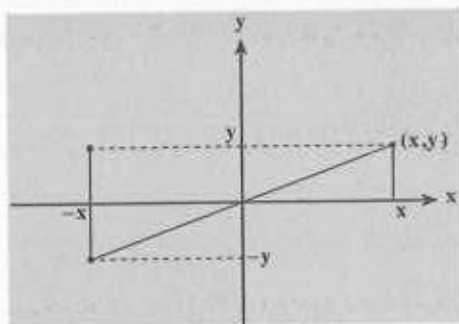


حالت ۴: $x < 0$ و $y < 0$ ؛ ($y > x$)



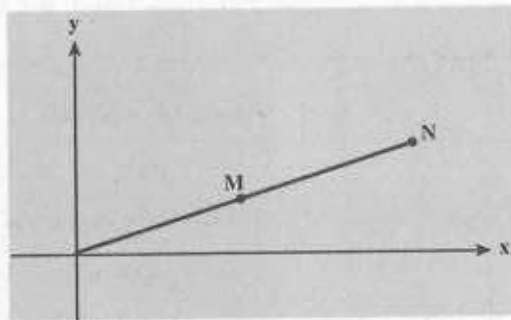
مشاهده می‌کنیم در حالت ۳ نتیجه‌ی مورد نظر ما به دست نیامد. به نظر شما علت چیست؟

به سادگی در شکل می توان دید که خط L روی خودش می رود ولی هر نقطه از A پس از یک تقارن مرکزی به ناحیه B می رود و برعکس.



سلیمان: آفرین! این همان رابطه $y > x$ است که نتیجه می دهد: $(-x, -y)$ در ناحیه B است؛ یعنی، $-x > -y$. آن چه خواسته بودم به دست آمد.

مسئله: نقطه M از صفحه را در نظر بگیرید و آن را به مبدأ وصل کنید؛ مانند شکل زیر: سپس فاصله M را از مبدأ دوراب کنید و نقطه N را به دست بیاورید.



هر نقطه از ناحیه A پس از انجام گرفتن عمل بالا به یک نقطه در ناحیه دیگر می رود، هر نقطه از ناحیه B هم با عمل بالا به خود ناحیه B می رود. سعی کنید در کلاس تعبیری جبری از این حقیقت هندسی به دست آورید. سپس این تعبیر جبری را با استفاده از الگوی هندسی بالا تعمیم دهید.





اما در صفحه‌ی مختصات برای بردن نقطه‌ی (x, y) به $(-x, -y)$ چه الگویی داریم؟
 سلیمان کمی فکر کرد و با خوشحالی ادامه داد: فهمیدم! تقارن مرکزی. یعنی تقارن به مرکز
 مبدأ صفحه‌ی مختصات.
 داود: باید ببینیم پس از یک تقارن مرکزی چه بلایی به سر نواحی A و B می‌آید.

۴-۳- نابرابری‌های ساده (روش جبری)

وقتی عدد a مثبت است می‌نویسیم $a > 0$ و وقتی a منفی است می‌نویسیم $a < 0$. شاید این‌ها ساده‌ترین نابرابری‌ها هستند. همین‌طور نابرابری $x^2 \geq 0$ برای هر عدد حقیقی x ، که می‌توان آن را تعمیم داد: برای دو عدد حقیقی x و y ، $x^2 + y^2 \geq 0$ و به همین ترتیب برای سه عدد حقیقی و بیش‌تر می‌توان تعمیم داد.

قبل از این‌که پیش برویم لازم است تعریف رسمی از نابرابری $a > b$ که می‌خوانیم « a بزرگ‌تر از b » ارائه دهیم.

تعریف: $a > b$ است هرگاه عدد مثبتی مانند h وجود داشته باشد که $a = b + h$. برعکس اگر عدد مثبتی چون h باشد طوری که $a = b + h$ آن‌گاه $a > b$.

نابرابری $a > b$ معادل نابرابری $a - b > 0$ است.

اکنون این سؤال را می‌توان مطرح کرد که نابرابری « $>$ » چه شباهت‌ها و تفاوت‌هایی با تساوی « $=$ » دارد. در حل معادله‌ها بارها از خاصیت‌های تساوی استفاده کرده‌ایم. وقتی به جای تساوی، نابرابری داریم چه خاصیت‌هایی برای آن وجود دارد. ابتدا بعضی از خاصیت‌های تساوی را بیان می‌کنیم.

۱- به دو طرف یک تساوی می‌توان یک عدد اضافه کرد.

«اگر $a = b$ و c یک عدد حقیقی باشد آن‌گاه $a + c = b + c$ ».

۲- می‌توان طرفین تساوی را در یک عدد ضرب کرد.

«اگر $a = b$ و c یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه $ac = bc$ ».

۳- می‌توان طرفین یک تساوی عدد را به توان یک عدد دیگر رساند.

«اگر $a = b$ و p یک عدد صحیح باشد آن‌گاه $a^p = b^p$ ».

۴- ترابایی: اگر $a = b$ و $b = c$ ، آن‌گاه $a = c$.

اکنون برقراری خاصیت‌های اخیر را در مورد نابرابری « $>$ » بررسی می‌کنیم.

۱- خاصیت ترابایی: اگر $a > b$ و $b > c$ ، آن‌گاه $a > c$.

براساس تعریف چون $a > b$ پس عدد مثبت h_1 وجود دارد که

$$a = b + h_1 \quad (۱)$$

و چون $b > c$ عدد مثبت h_2 وجود دارد که

$$b = c + h_2 \quad (۲)$$

اگر رابطه‌ی (۲) را در (۱) جایگزین کنیم به دست می‌آوریم:

$$a = (c + h_1) + h_2 = c + (h_1 + h_2)$$

چون $h_3 = h_1 + h_2$ عددی مثبت است بنابراین طبق تعریف $a > c$.

۲- جمع طرفین دو نابرابری: اگر $a > b$ و $c \geq d$ ، آنگاه $a + c > b + d$.

این خاصیت را در کلاس بررسی کنید و سپس راه حل‌ها را به بحث همگانی بگذارید. هرگاه یکی

از رابطه‌های $a > b$ یا $a = b$ برقرار باشد، می‌نویسیم $a \geq b$ و می‌خوانیم « a بزرگ‌تر یا مساوی b است».

قواعد ضرب

«اگر $a > b > 0$ و $c \geq d > 0$ ، آنگاه $ac > bd$ ».

برای بررسی این خاصیت از تعریف شروع می‌کنیم.

$a > b$ است، پس عدد مثبت h_1 وجود دارد که $a = b + h_1$

$c \geq d$ است، پس عدد مثبت h_2 وجود دارد که $c = d + h_2$ در حالتی که عدد h_2 را

صفر فرض می‌کنیم. بنابراین

$$ac = (b + h_1)(d + h_2) = bd + h_1d + h_1h_2 + bh_2$$

چون $h_1d + h_1h_2 + bh_2 \geq 0$ عدد مثبت است طبق تعریف نتیجه می‌گیریم که $ac \geq bd$.

اکنون اگر فرض کنیم $c = d$ آنگاه خاصیت دیگری به دست می‌آید که مشابه آن را در تساوی‌ها

داریم، یعنی $ac > bc$.

از طرف دیگر اگر فرض کنیم $c = a$ و $d = b$ آنگاه به دست می‌آوریم: $a.a > b.b$

$$a^2 > b^2$$

اگر این فرآیند را تکرار کنیم، خواهیم داشت: $a^k > b^k$ (k یک عدد طبیعی)

البته در حالت کلی k می‌تواند عدد گویای مثبت و گنگ مثبت هم باشد.

مسئله‌ی ۱: اگر a و b هر دو مثبت نباشند، آنگاه خاصیت بالا را بررسی کنید. اگر k منفی

باشد در مورد خاصیت بالا چه می‌توان گفت؟

در مسئله‌ی بعدی خواص نابرابری‌ها به کار گرفته می‌شوند.

«عددهای $\sqrt{5} + \sqrt{8}$ و $\sqrt{3} + \sqrt{11}$ را مقایسه کنید»

پیش از اینکه ادامه دهید روی مسئله کار کنید.



کوه ها همه سر فراز و استوارند.
همه به بالا اشاره می کنند.

ماه بانو، ماهرخ و مهتاب روی این مسئله کار کردند و سپس راه حل های خود را در کلاس ارائه کردند. راه حل های آن ها را مورد بررسی قرار می دهیم.
ماه بانو: من ماشین حساب را روشن کردم و عددها را با آن حساب کردم فوراً جواب به دست آمد و معلوم شد که

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} > \sqrt{3} + \sqrt{11}$$

ماهرخ راه حل خود را این گونه توضیح داد:

من رادیکال ها را با هم جمع کردم (!) به صورت زیر

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} = \sqrt{5+8} = \sqrt{13} \quad (!)$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{11} = \sqrt{3+11} = \sqrt{14} \quad (!)$$

$$\sqrt{13} < \sqrt{14}$$

چون ۱۴ بزرگ تر از ۱۳ است نتیجه گرفتم که

بنابراین جواب به صورت زیر است

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} < \sqrt{3} + \sqrt{11}$$

مهتاب نگاهی دیگر و بسیار عمیق داشت: این گونه ادامه بدهد ریاضیدان خواهد شد! با هم راه حل او را بررسی می کنیم.

مہتاب : مسئلہ را کہ خواندم دیدم کہ می‌خواهد دو عدد را با ہم مقایسہ کنیم، فہمیدم کہ تساوی، بزرگ‌تری یا کوچک‌تری آن‌ها نامعلوم است.

از ریاضیات سال‌های قبل آموختہ‌ام کہ در چنین حالتی یک مربع خالی «□» یا یک مربع کہ در داخل آن علامت سؤال «?» قرار دارد، بین دو عدد قرار دہم. من علامت دوم را بیش‌تر دوست دارم و آن را بہ کار گرفتم و عبارت زیر را نوشتم

$$\sqrt{5} + \sqrt{8} \quad ? \quad \sqrt{3} + \sqrt{11}$$

در تساوی‌ها ہر وقت رادیکال داشتیم سعی می‌کردیم با مجذور کردن از دست آن‌ها خلاص شویم. چون این عمل برای نابرابری‌ها نیز درست است، پس در ہر حالت (مساوی یا نابرابری) می‌توان از آن استفادہ کرد. این کار را انجام دادم :

$$(\sqrt{5} + \sqrt{8})^2 \quad ? \quad (\sqrt{3} + \sqrt{11})^2$$

$$5 + 2\sqrt{5} \times \sqrt{8} + 8 \quad ? \quad 3 + 2\sqrt{3} \times \sqrt{11} + 11$$

$$13 + 2\sqrt{5} \times 8 \quad ? \quad 14 + 2\sqrt{3} \times 11$$

خوب کہ بہ رابطہ‌ی آخر نگاہ کردم تقریباً حل مسئلہ را فہمیدم و کار تمام شدہ بود ولی دلم می‌خواست ہمہی مراحل را با وسواس تا آخر بروم. بلہ، اکنون با دو عدد رادیکالی سروکار داریم، در صورتی کہ ابتدا چہار عدد رادیکالی داشتیم. خاصیت دیگری از تساوی‌ها و نابرابری‌ها کہ می‌گوید : «می‌توان از دو طرف یک مقدار کم کرد یا بہ دو طرف، یک مقدار اضافہ کرد»

$$13 + 2\sqrt{40} \quad ? \quad 14 + 2\sqrt{33}$$

۱۳ واحد از دو طرف کم می‌کنیم

$$2\sqrt{40} \quad ? \quad 1 + 2\sqrt{33}$$

بار دیگر عمل مجذور کردن را بہ کار بردم و رسیدم بہ

$$4 \times 40 \quad ? \quad 1 + 2 \times 2\sqrt{33} + 4 \times 33$$

$$160 \quad ? \quad 133 + 4\sqrt{33}$$

$$27 \quad ? \quad 4\sqrt{33}$$

$$(27)^2 \quad ? \quad (4\sqrt{33})^2$$

$$729 \quad ? \quad 528$$

مسئله حل شد. یعنی معلوم شد که کدام عدد بزرگ‌تر است؛ اکنون روی رد پای خود به عقب برمی‌گردیم و می‌نویسیم:

$$\sqrt{3} + \sqrt{11} < \sqrt{5} + \sqrt{8}$$

هر سه راه حل را به بحث بگذارید و روی ویژگی‌های هر کدام بحث کنید. آیا راه حل‌ها از نظر استدلال دقیق ریاضی کامل هستند؟

مسئله‌ی ۲: کدام یک از اعداد $\sqrt{3} + \sqrt{17}$ و $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ بزرگ‌تر است؟ در کلاس روی این مسئله کار کنید و سپس نتیجه‌ی تلاش‌ها را به بحث بگذارید.



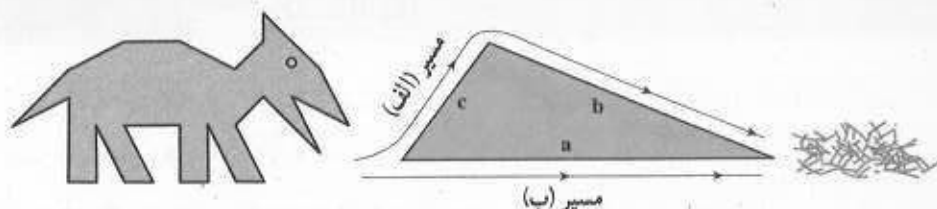
مسئله‌ها

۱. نشان دهید $2 + \sqrt{7} < 5$.
۲. نشان دهید $2 + \sqrt[3]{7} < 4$.
۳. اگر $a > b > 0$ باشد، رابطه‌ی بین دو عدد $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{a}$ را بررسی کنید.
۴. کدام یک از دو عدد $\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{2}{7}}$ و $\sqrt{\frac{5}{12}} + \sqrt{\frac{1}{5}}$ بزرگ‌تر است؟ حدس بزنید و ثابت کنید.
۵. اگر $a < 1$ آن‌گاه $2 - 2a > 0$. این خاصیت را بررسی کنید و استدلالی برای آن ارائه کنید.
۶. اگر $k < 0$ عددی صحیح باشد برای $a > b > 0$ رابطه‌ی a^k و b^k را بررسی کنید.
۷. کدام یک از دو عدد $2(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ و $3\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ بزرگ‌تر است؟ حدس خود را ثابت کنید.
۸. فرض کنید n عددی طبیعی است رابطه‌ی بین سه عدد $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ، $2\sqrt{n-1}$ و $2\sqrt{n}$ حدس و آزمایش، تنظیم جدول و خاصیت‌های نابرابری‌ها را مورد استفاده قرار دهید.



۴-۴- نابرابری مثلثی

در تاریخ ریاضیات ایرانی عنوان جالبی وجود دارد که هم سؤال برانگیز است و هم خنده‌دار! «قضیه جمار» که حکایت از یک اصل بسیار بدیهی دارد. اگر برای رسیدن به علوفه دو راه به صورت زیر ممکن باشد طوری که حیوان گرسنه علف‌ها را ببیند.



آن‌گاه به طور غریزی و طبیعی راه کوتاه‌تر را انتخاب می‌کند. این آزمایش طبیعی حاکی از واضح بودن این اصل بسیار مهم است! یعنی طول مسیر (ب) [ضلع a] از طول مسیر (الف) شامل دو ضلع [ضلع‌های b و c] کوتاه‌تر است. این حقیقت نابرابری مثلثی نامیده می‌شود و می‌توان آن را به زبان ریاضی به صورت زیر نوشت:

$$a < b + c$$

به طور مشابه:

$$b < a + c, \quad c < b + a$$

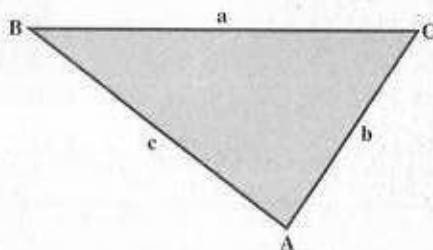
چنانچه فقط در دنیای مثلث‌ها قدم بزنیم و به این ویژگی نگاه کنیم، می‌توانیم بیان دیگری برای نابرابری مثلثی ارائه کنیم:

«در هر مثلث، طول هر ضلع از مجموع طول‌های دو ضلع دیگر کمتر است.»

پس از ارائه‌ی این توضیحات معلم گفت: حرف زدن بس است! نوبت انجام دادن است.

مسئله‌ی ۱: مثلث ABC را در نظر بگیرید. نشان دهید نابرابری زیر همواره برقرار است:

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0$$



مسئله‌ی ۲: نشان دهید در هر مثلث، تفاضل هر دو ضلع، کوچک‌تر از ضلع سوم است.

دانش‌آموزان این دو مسئله را خیلی زود حل کردند. پس از ارائه‌ی راه‌حل‌ها معلم ادامه داد:

برعکس نابرابری مثلثی نیز برقرار است؛ یعنی، اگر a, b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند طوری که نابرابری‌های مثلثی (هر سه نابرابری) برقرار شوند، آن‌گاه می‌توان مثلثی ساخت که a, b و c اندازه‌های ضلع‌های آن باشد.

اگر با نگاهی کنجکاوانه بحث را دوباره مرور کنیم ممکن است سؤال‌هایی به ذهن برسد. تمرین خوبی است! این کار را انجام دهید!

یکی از نکته‌هایی که ممکن است به آن برخورد کنید مثبت بودن سه عدد a, b و c است! دقت کنید که این‌ها طول ضلع‌های مثلث بودند. «آیا این نابرابری فقط برای عددهای مثبت است؟» بد نیست آزمایش کنید! خیلی زود متوجه پاسخ خواهید شد.

خاصیت نابرابری مثلثی با استفاده از مفهوم قدر مطلق صورت دیگری دارد که دارای کاربردهای فراوانی در ریاضیات است. این شکل از نابرابری مثلثی را صورت جبری نابرابری مثلثی می‌نامیم.

مسئله‌ی ۳: صورت جبری نابرابری مثلثی: برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

ابتدا نابرابری را ثابت کنید و سپس راجع به تفاوت‌ها و شباهت‌های صورت هندسی و صورت جبری نابرابری مثلثی بحث کنید.

پس از درگیر شدن بچه‌ها با این مسئله هیچ کدام از گروه‌ها پیشرفت قابل توجهی در حل این مسئله نداشتند. معلم با مشاهده‌ی این وضعیت گفت: مثل این که اکثریت شما با مشکل روبرو شدید.

را هبرد تنظیم جدول نظام دار را آزمایش کنید!
 پس از این راهنمایی بعضی از گروه‌ها پیشرفت‌هایی به دست آوردند. آن‌گاه بچه‌ها راه حل‌ها و تلاش‌هایشان را ارائه کردند و در مورد راه حل‌ها بحث و گفت‌وگو انجام شد. در پایان کار بود که علی (یکی از دانش‌آموزان) پرسید:

«صورت جبری نابرابری مثلثی چه ربطی با مثلث دارد؟»

سوالی هوشیارانه است و پاسخ آن نیز نیازمند یادآوری و طرح مفاهیم دیگر ریاضی است. معلم در حالی که این جمله را زیر لب زمزمه می‌کرد گفت: به نظر می‌رسد که یک سخنرانی مفصل لازم است! البته می‌توانیم با هم دیگر راه را کوتاه کنیم! [سؤال و پاسخ بین معلم و دانش‌آموزان]
 معلم: برای این که ارتباط بین مثلث و صورت جبری نابرابری مثلثی را درک کنیم باید مطالبی از دوره‌ی راهنمایی را مرور کنیم. یکی از بحث‌هایی که در دوره‌ی راهنمایی مطالعه کردیم، بحث بردارها در صفحه مختصات بود.

معلم: هر بردار در صفحه را چگونه نمایش می‌دهیم؟

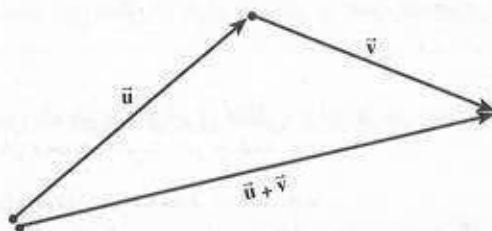
علی: هر بردار در صفحه را با دو مختصه‌ی طول و عرض نمایش می‌دهند. برای مثال اگر $\vec{v}$ یک بردار با طول ۵ و عرض ۳- باشد می‌نویسیم:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

طول بردار
عرض بردار

معلم: دو بردار چگونه با هم جمع می‌شود؟

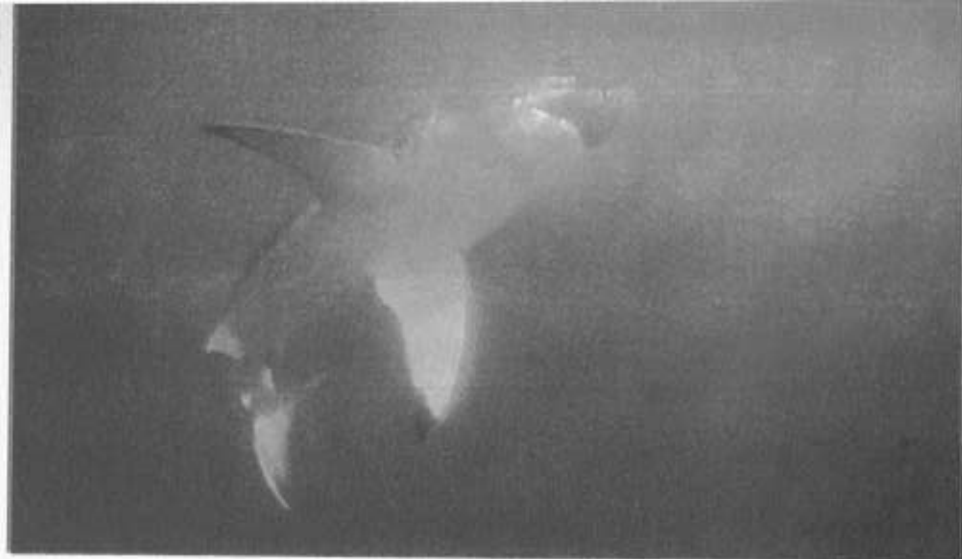
علی: بردارها به دو روش مثلث و متوازی‌الاضلاع با هم جمع می‌شوند. روش مثلث به صورت زیر است:



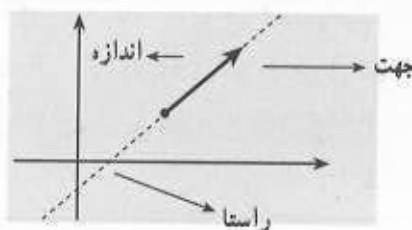
مسئله‌ی ۴: جمع بردارها به روش متوازی‌الاضلاع را بیان کنید و با روش مثلث مقایسه کنید.

معلم: آیا با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\vec{u} + \vec{v} \leq \text{اندازه‌ی } \vec{u} + \text{اندازه‌ی } \vec{v}$$



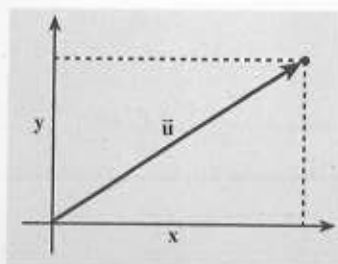
علی : اندازه ی بردار یعنی چه؟
 معلم : یک بردار سه مشخصه دارد : جهت، راستا (امتداد) و اندازه.
 اندازه ی بردار همان درازای بردار است.



علی : منظور از درازا همان طول بردار است؟
 معلم : هم آری و هم نه! هر بردار در صفحه دارای دو مختصه است طول و عرض. در نمایش جبری می نویسیم :

$$\text{بردار} = \begin{bmatrix} \text{طول} \\ \text{عرض} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

طول بردار همان مختصه بردار در جهت محور x هاست و عرض بردار همان مختصه بردار در جهت y هاست. به این دلیل معمولاً طول را با x و عرض را با y نمایش می دهند (شکل روبه‌رو).



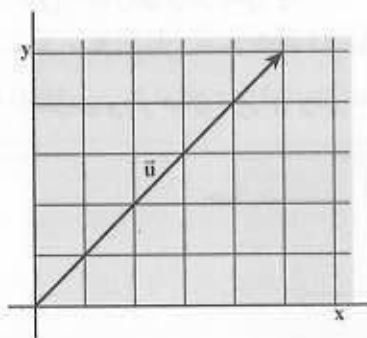
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

اکنون قبول دارید که اندازه بردار $\vec{u}$ همان مختصه طول $\vec{u}$ نیست؟ اگر منظور علی از طول بردار همان درازای بردار باشد آنگاه طول بردار همان اندازه بردار است. معلم: با این توضیحات، آیا قبول دارید که:

$$\text{اندازه ی } \vec{v} + \text{اندازه ی } \vec{u} \leq \text{اندازه ی } \vec{u} + \vec{v}$$

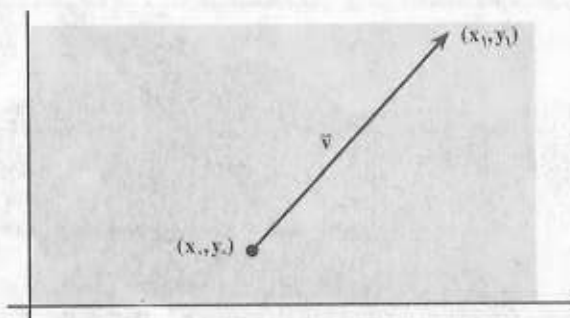
علی: این همان نابرابری مثلثی است. اما هنوز رابطه بین صورت جبری نابرابری مثلثی را با مثلث متوجه نمی شوم. معلم: بسیار خوب. کافی است مسئله های زیر را حل کنیم.

مسئله ۵: بردار $\vec{u}$ را در شکل زیر در نظر بگیرید. اندازه بردار $\vec{u}$ را با $|\vec{u}|$ نمایش دهید و آن را محاسبه کنید.



$$|\vec{u}| = ?$$

مسئله ۶: فرض کنید نقطه ابتدای بردار $\vec{v}$ به طول x_0 و عرض y_0 است و نقطه انتهایی بردار $\vec{v}$ به طول x_1 و عرض y_1 است. آنگاه اندازه بردار $\vec{v}$ را محاسبه کنید.



مسئله ۷: فرض کنید $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$. آنگاه رابطه ی زیر را بررسی کنید.

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$

آیا این رابطه همان صورت جبری نابرابری مثلثی است؟ توضیح دهید.

علی: من هنوز قانع نشده‌ام زیرا صورت جبری نابرابری مثلی به صورت زیر بود:

برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

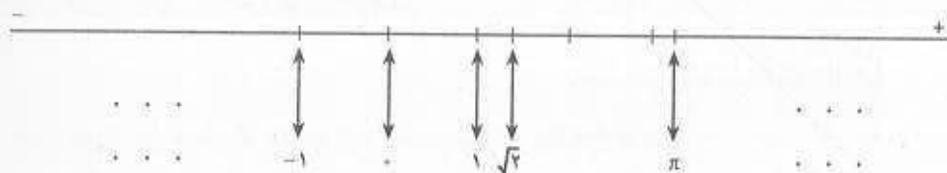
در این جا x و y عدد حقیقی هستند در صورتی که نابرابری به دست آمده در مسئله ی ۳ مربوط به بردارهاست!

معلم: از دقت و کنجکاوی علی بسیار خوشحالم. واقعاً جا دارد همه علی را تشویق کنیم. اجازه دهید کمی سطح بالاتر توضیح دهم!

ما می‌توانیم اعداد حقیقی (به طور کلی عددها) را به عنوان نهادهایی صوری در نظر بگیریم که با آن‌ها عملیاتی را انجام می‌دهیم. این یک نوع مدلسازی است.

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ گویاست یا } x \text{ گنگ است}\} = \text{عددهای حقیقی}$$

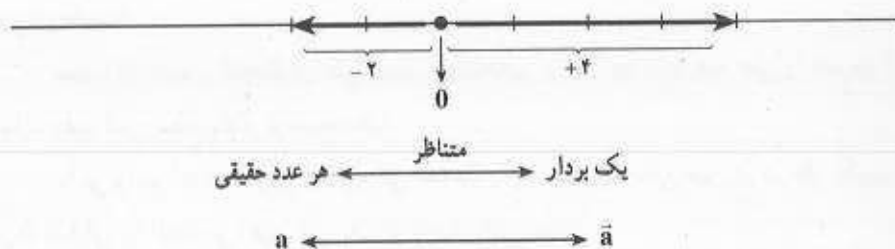
مدل دوم این طور است که فرض کنیم اعداد حقیقی مانند نقاط روی یک خط هستند که هر نقطه ی روی آن متناظر یک عدد حقیقی است.



این یک مدلسازی دیگر از عددهای حقیقی است. این مدل را محور عددهای حقیقی می‌نامند. می‌توان مدل سوم ی نیز برای عددهای حقیقی ساخت.



روی یک خط راست نقطه‌ای را به عنوان مبدأ در نظر بگیرید.
 برای مثال، یک خط افقی در نظر بگیرید. هر عدد حقیقی را متناظر یک بردار روی این خط فرض کنید طوری که اگر عدد مثبت بود، جهت بردار متناظر به سمت راست مبدأ و اگر عدد منفی بود، جهت بردار به سمت چپ مبدأ باشد.



بردارها می‌توانند از مبدأ یا هر نقطه دیگر شروع شوند. این مدل را مدل برداری عددهای حقیقی می‌نامند. اگر مدلسازی برداری عددهای حقیقی را مبنا قرار دهیم، آن‌گاه می‌توانیم صورت جبری نابرابر مثلثی را به صورت زیر بنویسیم:

$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

علی: باور نکردنی است! سه نوع مدلسازی برای عددهای حقیقی!
 معلم: این هم از زیبایی‌های ریاضی است. درباره‌ی آن‌ها فکر کنید!
 اکنون نوبت انجام دادن است.



مسئله‌ها

۱- بردارها در صفحه را در نظر بگیرید. هر بردار دو مختصه‌ی طول و عرض دارد. زیرمجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \left\{ \vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid y = 0 \right\}$$

سعی کنید شکل‌هایی رسم کنید و تصویری از مجموعه‌ی A به دست آورید. سپس در مورد آن بحث کنید.

۲- آیا می‌توان نابرابری مثلثی را به حالت سه عدد حقیقی تعمیم داد؟ چهار عدد چه طور؟ در حالت n عدد حقیقی چه طور؟ بررسی کنید.

۳- همان گونه که ملاحظه کردید نابرابری مثلثی در حالت بردارهای دوبعدی (بردارهای صفحه) را به حالت یک‌بعدی کاهش دادیم. اگر به حالت بردارهای سه‌بعدی (بردارها در فضا) برویم. آیا نابرابری مثلثی برقرار خواهد بود؟ آیا این تعمیم همانند تعمیم نابرابری مثلثی از دو عدد حقیقی به سه عدد حقیقی است؟ آیا می‌توانید تعمیمی برای نابرابری مثلثی در حالت چهاربعدی تعریف کنید؟ چهار بُعد دیگر چیست؟ اگر با مشکلی روبرو شدید ابتدا مسئله‌ی چهار را بررسی کنید.

۴- فکر می‌کنید تعمیم بردار دوبعدی به بردار سه‌بعدی چگونه خواهد بود؟ تعمیم بردار به چهار بُعد چه طور؟ به n بُعد چه طور؟

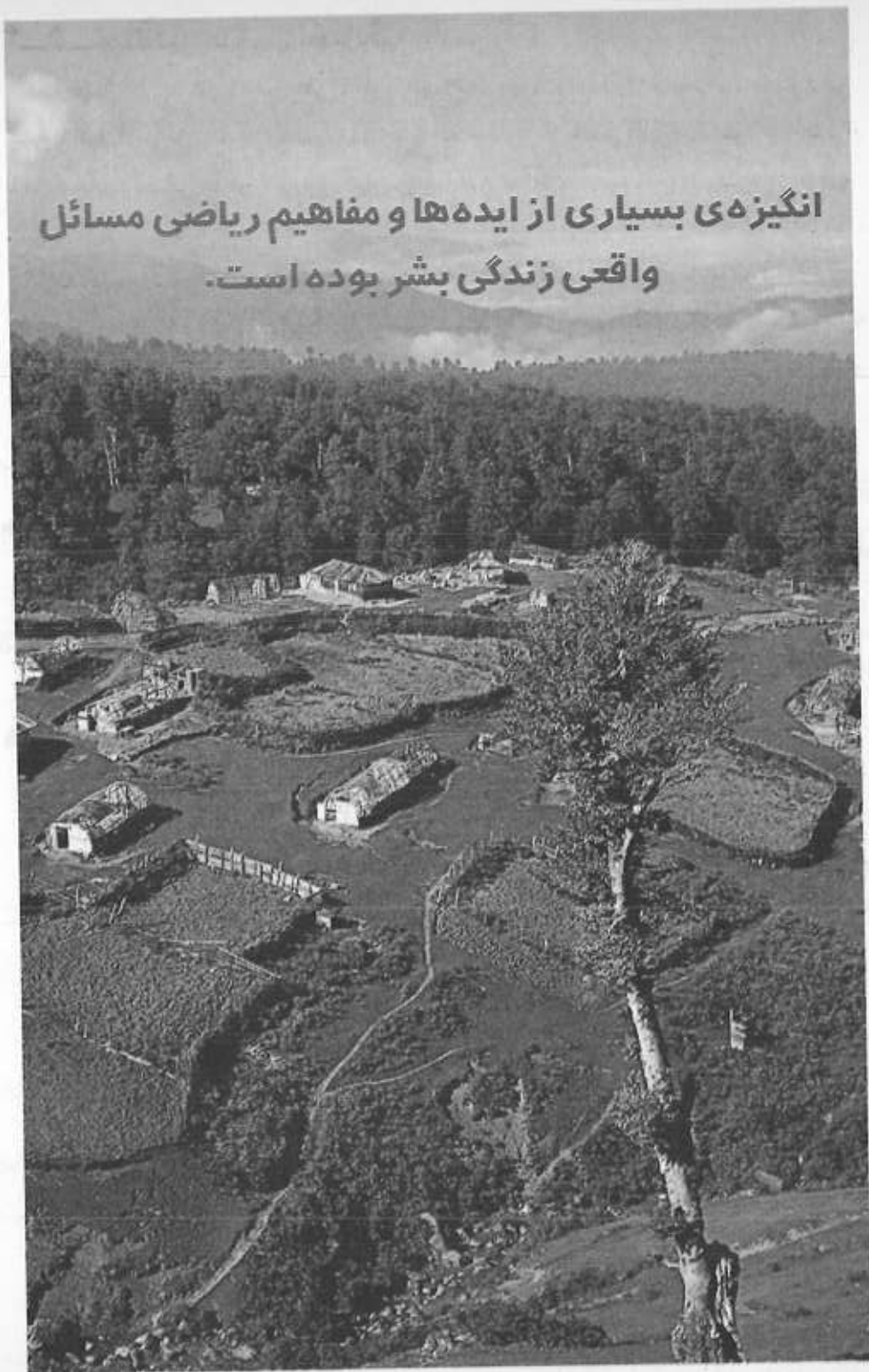
۵- اگر در مسئله‌ی قبل پیشرفتی داشتید قبل از این که به مسئله‌ی ۳ برگردید راجع به اندازه‌ی بردار در حالت سه‌بعدی، چهاربعدی و ... فکر کنید. سعی کنید اندازه‌ی بردار را محاسبه کنید!

مسئله‌های ۳ و ۴ و ۵ فرصت خوبی است تا با یک تجربه‌ی بی‌نظیر روبرو شوید. البته لازم است که از هیچ کتاب یا منبعی استفاده نکنید! و از معلم ریاضی یا هر کسی که ریاضیات سطح بالاتر را می‌داند سؤال نکنید! از اشتباه کردن نترسید، حدس بزنید و آزمایش کنید. پیدا کردن پاسخ این مسئله‌ها یا پرسیدن پاسخ آن‌ها هیچ ارزشی برای شما ندارد! اما تلاش فکری شما می‌تواند شما را راه بیندازد. مهم نیست اشتباه کنید.

۶- ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل مثلث از سه رأس مثلث، از نصف محیط مثلث بیش‌تر است.

۷- اگر a, b و c طول ضلع‌های یک مثلث باشند، آنگاه $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}$ و $\frac{1}{c+a}$ هم یک مثلث تشکیل می‌دهند.

انگیزه‌ی بسیاری از ایده‌ها و مفاهیم ریاضی مسائل
واقعی زندگی بشر بوده است.



۴-۵- میانگین حسابی - میانگین هندسی

حصارکشی زمین! (چه ربطی به میانگین‌ها دارد؟): سیم توری مخصوص حصارکشی زمین به اندازه‌ی ۳۰۰۰ متر در اختیار است. می‌توانید زمینی را با حصارکشی به نام خود ثبت کنید؛ با این شرط که مستطیل شکل باشد. همه می‌خواهند زمین بیش‌تری به‌دست آورند. بیش‌ترین سطح زمینی که می‌توان حصارکشی کرد، چه قدر است؟

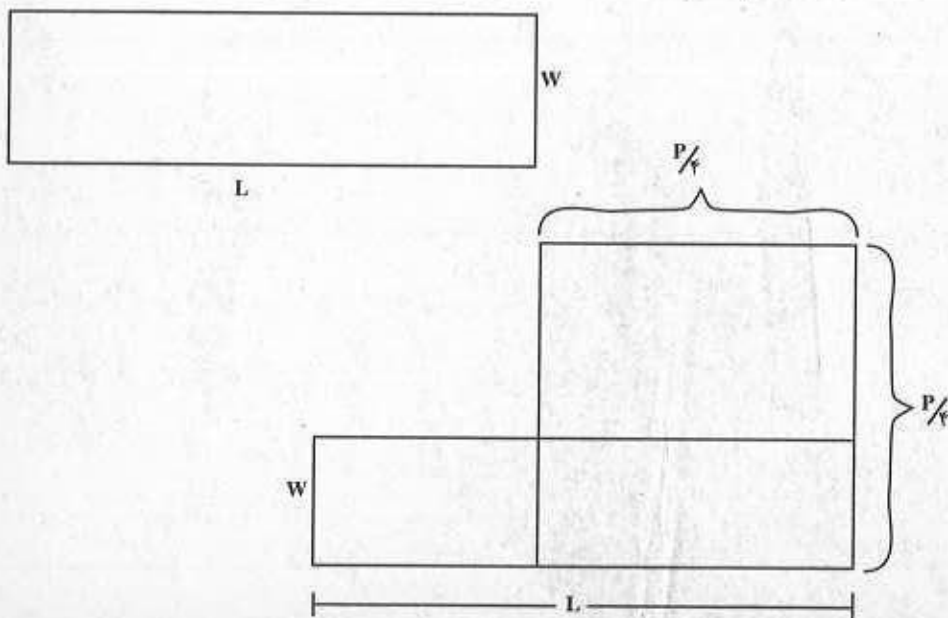
شکلی رسم کنید و «حدس و آزمایش» و «تنظیم جدول نظام‌دار» را در دستورکار قرار دهید. شاید شبیه این مسئله را قبلاً حل کرده باشید! بهتر است ابتدا روی مسئله کار کنید و بعد، به ادامه‌ی بحث بپردازید!

به‌دوران باستان می‌رویم و با روش هندسی که در آن زمان‌ها بیش‌تر مورد توجه بوده است، آشنا می‌شویم. قبل از این کار اجازه دهید مسئله را به بیان ریاضی درآوریم و تعمیم دهیم.

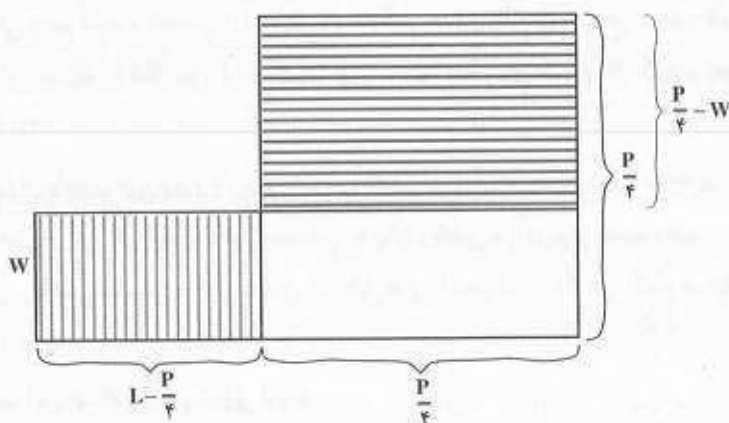
بیان ریاضی مسئله: در بین همه‌ی مستطیل‌های با محیط ۳۰۰۰ متر، کدام مستطیل بیش‌ترین مساحت را دارد؟

تعمیم این مسئله به‌صورت زیر است.

در میان همه‌ی مستطیل‌های با محیط ثابت، کدام یک بیش‌ترین مساحت را دارا است؟ شکلی رسم می‌کنیم و طول و عرض را با نمادهای L و W مشخص می‌کنیم. محیط مستطیل را با P نمایش می‌دهیم. طرح هوشمندانه‌ی زیر، قلب راه‌حل مسئله را در خود دارد.



مربعی به ضلع $\frac{P}{4}$ روی یک طرف مستطیل ساخته ایم (البته اگر طول و عرض مستطیل برابر باشد، مربع بر مستطیل منطبق می شود؛ لذا فرض می کنیم: $W < L$). برای این که نشان دهیم مساحت مربع از مساحت مستطیل بیش تر است، باید نشان دهیم بخش هاشور خورده‌ی  از بخش  بزرگ تر است. (چرا؟)



مساحت هریک را محاسبه می کنیم.

$$\text{مساحت } \text{hatched square} = \frac{P}{4} \times \left(\frac{P}{4} - W \right)$$

$$\begin{aligned} \text{مساحت } \text{hatched rectangle} &= W \left(L - \frac{P}{4} \right) = W \left(\frac{P}{4} - W - \frac{P}{4} \right) \\ &= W \left(\frac{P}{4} - W \right) \end{aligned}$$

چون $W < \frac{P}{4}$ است. (چرا؟)، بنابراین، مساحت  بیش تر از مساحت  است و این،

همان است که می خواستیم. می توان نتیجه‌ی این استدلال بالا را با نمادهای جبری بیان کرد. مساحت

مستطیل $L.W$ و مساحت مربع $\left(\frac{P}{4} \right)^2$ است. در این صورت، نشان دادیم که

$$LW \leq \left(\frac{P}{4} \right)^2 \text{ و تساوی هنگامی برقرار می شود که } L = W.$$

اما چون $\frac{P}{4} = \frac{L+W}{2}$ ، می توان نتیجه را دوباره به صورت زیر نوشت: $\sqrt{LW} \leq \frac{L+W}{2}$ و

تساوی هنگامی برقرار می شود که $L = W$.

نکته‌ی مهم در آخرین صورت نتیجه، این است که L و W ، دو عدد حقیقی مثبت هستند که حکم طول و عرض مستطیل را دارند؛ بنابراین، در مورد هر دو عدد حقیقی مثبت به نایبراری مهمی رسیده‌ایم! در بخش‌های قبل، راه کار حدس و آزمایش را برای حل مسئله‌ای مشابه مسئله حصارکشی زمین به کار برده‌ایم. آیا بین مسئله‌ی حصارکشی زمین در این جا و مسئله‌ی مشابه در بخش حدس و آزمایش، تفاوتی مشاهده می‌کنید؟ درباره‌ی این موضوع فکر کنید.

همواره، بین این دو نوع میانگین رابطه‌ی مهم زیر وجود دارد:

$$\text{میانگین هندسی} \geq \text{میانگین حسابی}$$

نایبراری میانگین حسابی — میانگین هندسی

برای دو عدد حقیقی مثبت a و b داریم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

سعید در به کارگیری روش‌های جبری مهارت خوبی دارد. او روی این مسئله کار کرد و نتیجه‌ی کارش را به صورت زیر توضیح داد.

«این رابطه برای ما نوس نبود. ابتدا در درستی آن شک کردم. به این دلیل، چندبار به جای a و b عدد قرار دادم و آزمایش کردم. همگی، این نایبراری را تأیید کردند. یادم افتاد که هر وقت در محاسبه‌های جبری با رادیکال سروکار داشتیم، معلم ما تأکید می‌کرد که سعی کنید با انجام دادن عملیاتی درست از دست رادیکال‌ها خلاص شوید. به توان دو رساندن یکی از راه‌های رهایی از دست رادیکال‌هاست. طرفین را به توان دو رساندم:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq (\sqrt{ab})^2 = ab$$

همه‌ی عبارت‌ها را به یک طرف بردم:

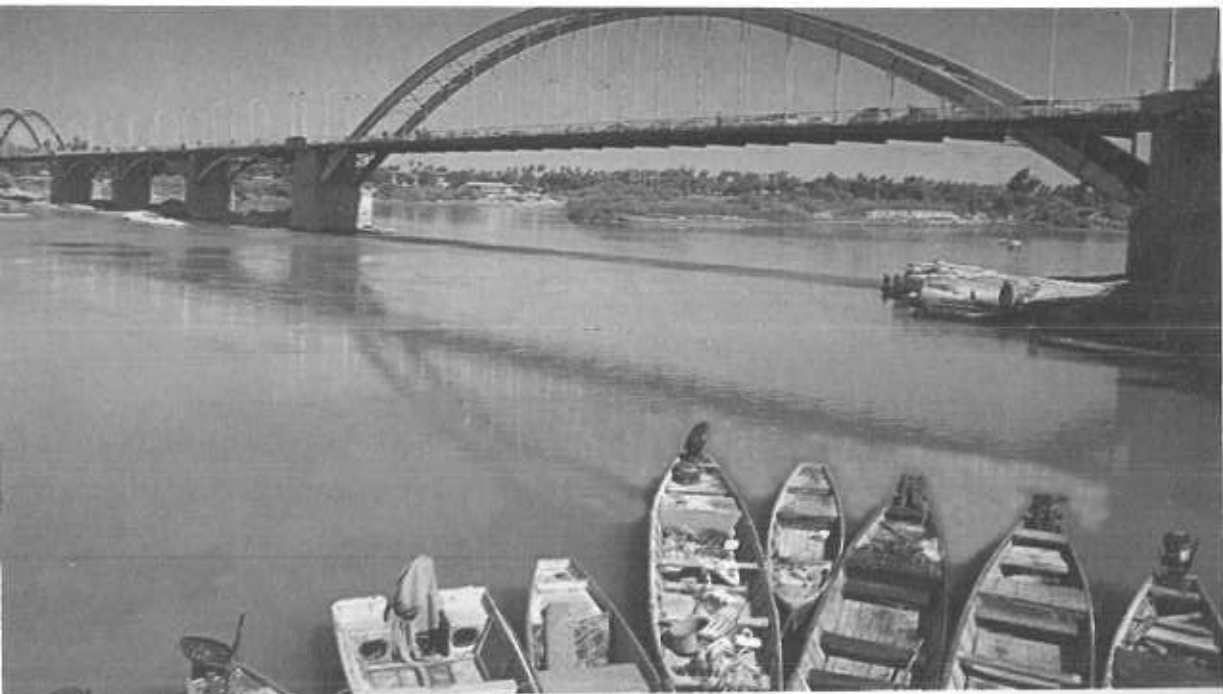
$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$$

به نظرم رسید اتحاد را ساده کنم:

$$\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} - ab \geq 0$$

طرفین را در چهار ضرب کردم:

$$a^2 + b^2 + 2ab - 4ab \geq 0$$



$$a + b^2 - 2ab \geq 0$$

ادامه‌ی کار برایم روشن بود :

$$(a - b)^2 \geq 0$$

بنابراین، کار تمام است..»

پس از پایان توضیحات سعید، مهدی اجازه گرفت و گفت : این استدلال درست نیست ؛ زیرا سعید از اول، نابرابری را درست فرض کرده است. اگر نابرابری درست باشد که به اثبات احتیاج ندارد! در مورد راه حل سعید و نظر مهدی بحث همگانی کنید.

محمدصادق مسئله را با شیوه‌ای دیگر حل کرد. راه حل او را ملاحظه می‌کنیم «من طرفین را در دو ضرب کردم و عبارت‌ها را به یک طرف بردم» :

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

طرف اول، یک اتحاد ساده است :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

چون این رابطه درست است، پس نابرابری مسئله درست است. آیا این استدلال دقیق است؟ درباره‌ی آن بحث کنید.

امین نیز این مسئله را حل کرد. مسیر فکری او را مرور می‌کنیم. امین این‌طور توضیح داد :

«من فرض کردم که نابرابری $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ درست است. سپس طرفین را دو برابر کردم و به

توان دو رساندم و ساده کردم ؛ به رابطه‌ی $(a - b)^2 \geq 0$ رسیدم. در این‌جا متوجه شدم که شروع

اثبات نابرابری، از این رابطه خواهد بود؛ بنابراین، روابط زیر را نوشتیم:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

به بن بست رسیدیم. یک بار دیگر، رابطه‌ها را بررسی کردیم. از رابطه‌ی دوم به بعد ترفندی دیگر به کار بردیم؛ به طرفین، $4ab$ اضافه کردیم!

$$a^2 + b^2 - 2ab + 4ab \geq 0 + 4ab$$

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$$

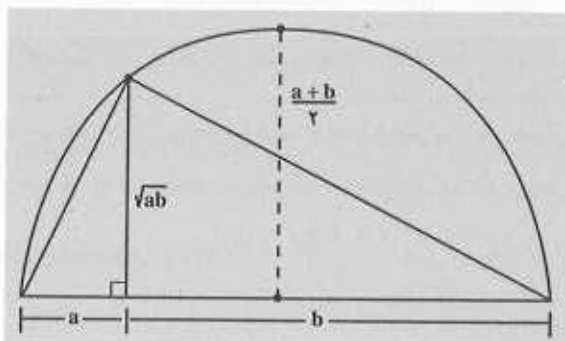
$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

و ... چه خوب ...!

علی که در به کارگیری روش‌های هندسی مهارت زیادی دارد، با هوشیاری خاصی شکل زیر را روی تابلو رسم کرد و گفت: «این اثبات نابرابری است.»



مسئله‌ی ۱: راه‌حل علی را به‌طور دقیق و کامل توضیح دهید و در کلاس درس، روی آن

بحث کنید. این روش اثبات به اثبات بدون کلام معروف است.

مسئله‌ی ۲: با توجه به راه‌حل‌های ارائه شده، در چه صورت نابرابری به تساوی تبدیل می‌شود؟

این مسئله را حل کنید و درباره‌ی راه‌حل‌های آن به گفت‌وگو بپردازید. موشکافی اثبات‌ها و

راه‌حل‌ها بخشی از یادگیری ریاضی است. آن را دست کم نگیرید.

نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی دارای کاربردهای گوناگونی است. بعضی از کاربردهای آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

بیش‌ترین مقدار حاصل ضرب

- اگر مجموع دو عدد ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی بیش‌ترین مقدار خود را دارد که آن دو عدد مساوی باشند.

تلاش کنید مسئله را حل کنید و سپس به مطالعه‌ی ادامه‌ی بحث بپردازید. آرش روی این مسئله کار کرد و سپس، راه حل خود را ارائه داد. او خلاصه‌ای از فرآیند حل مسئله‌ی خود را به این صورت بیان کرد:

باز اول که مسئله را خواندم، دو عبارت «مجموع دو عدد» و «حاصل ضرب آن‌ها» توجه مرا جلب کرد. به دنبال رابطه‌ای می‌گشتم که هم حاصل ضرب و هم مجموع داشته باشد. ناگهان نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی در نظرم ظاهر شد. دو عدد دلخواه را x و y نامیدم و نابرابری را نوشتم.

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

طبق عادتی که داشتم، به توان دو رساندم تا از عبارت رادیکالی خلاص شوم:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$$

حالا هم حاصل ضرب دو عدد را داشتم و هم مجموع آن‌ها را. نمی‌دانستم چه کار باید بکنم؛ تصمیم گرفتم صورت مسئله را با دقت بخوانم. دو عبارت دیگر، یعنی «مجموع دو عدد ثابت» و «بیش‌ترین مقدار آن‌ها» به نظرم با اهمیت آمد. به آخرین رابطه - یعنی $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$ - باز گشتم و سعی کردم

درک بهتری از آن به دست بیاورم. این رابطه می‌گوید که حاصل ضرب x و y همواره کمتر یا مساوی توان دوم نصف مجموع آن‌هاست. به این نتیجه رسیدم که حاصل ضرب x و y حداکثر می‌تواند مساوی

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ باشد. پس این تساوی را نوشته $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy$ سپس عملیات جبری را ادامه دادم:

$$\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4} = xy$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 4xy$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

$$(x - y)^2 = 0$$

و این رابطه، تنها وقتی برقرار است که $x = y$.

مقدار ثابت مجموع دو عدد را k گرفتیم؛ یعنی، $x + y = k$. به این ترتیب با توجه به $x = y$

$$x = y = \frac{k}{2}$$

نتیجه گرفتیم.

و این حالتی بود که xy بیشترین مقدار خود را می‌گرفت؛ بنابراین:

$$x \cdot y = \frac{k}{2} \times \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4}$$

و این، همان بود که می‌خواستیم.

مجموع یک عدد و معکوس آن

مجموع یک عدد مثبت و معکوس آن، حداقل برابر دو است.

ایست! این مسئله‌ی جالبی است. لذت حل کردن آن را از دست ندهید.

احمد، علی و امیرحسین این مسئله را با روش‌های متفاوتی حل کردند. آن‌ها راه‌حل‌ها را به

شیوه‌ای غیر معمول ارائه کردند؛ در حالی که حدیث

«خَيْرُ الْكَلَامِ مَا قَلَّ وَ دَلَّ»^۱ را محور قرار داده بودند.

راه‌حل‌های آن‌ها را می‌بینیم.

احمد گفت: این مسئله حالت خاصی از نابرابری

میانگین حسابی - میانگین هندسی است.

علی شکل روبه‌رو را روی تابلو رسم کرد و گفت

این استدلال مسئله است!

امیرحسین هم شکل زیر را رسم کرد و گفت:

«این شکل، راه‌حل من است.»

هریک از این سه راه‌حل را توضیح دهید و سپس

درباره‌ی آن‌ها بحث همگانی کنید.

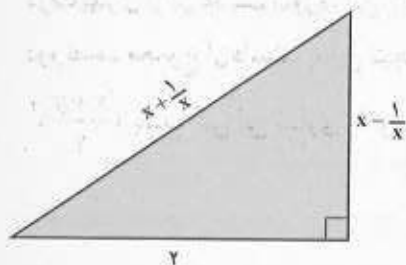
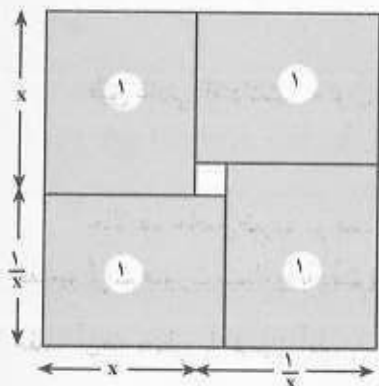
تعمیم دادن ایده‌ها و مفاهیم از جمله راه کارهای

مهم کسب نتایج جدید ریاضی است. علاوه بر این، یکی

از مهارت‌های اساسی ریاضیات، تعمیم دادن است. از

جمله مسئله‌هایی که بررسی کردیم، یکی این بود که وقتی مجموع دو عدد مثبت ثابت است، بیش‌ترین

مقدار حاصل ضرب آن‌ها چیست؟ به بیان ریاضی:



۱- از سخنان امام علی علیه‌السلام: بهترین سخن‌ها، آن است که کوتاه و با دلیل باشد.

اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت و مجموع $x + y$ ثابت باشد، آن گاه بیشترین مقدار xy در چه حالتی اتفاق می افتد؟

برای مسئله‌ی قبل می توان تعممی به صورت زیر بیان کرد.

اگر x ، y و z سه عدد حقیقی باشند و مجموع آن ها ثابت باشند، آن گاه بزرگترین مقدار حاصل ضرب xyz چیست؟

اکنون فرصت خوبی برای آزمایش توانایی حل مسئله است. از این فرصت استفاده کنید و خود را محک بزنید.

محبوبان و دو نفر از همکلاسی های این مسئله به صورت گروهی حل کردند. خلاصه‌ای از راه حل آن ها را بررسی می کنیم.

«ما ابتدا فرض کردیم $x + y + z = S$ ، طوری که S عددی ثابت است. از مسئله‌ی حاصلگشتی، حدس زدیم که بزرگترین مقدار حاصل ضرب xyz در حالت $x = y = z = \frac{S}{3}$ اتفاق می افتد!

بعد سعی کردیم حدسمان را ثابت کنیم. پس از بحث و گفت و گو ی زیاد، به این نتیجه رسیدیم که باید مجموعه‌ی همه‌ی سه تایی هایی از اعداد مثبت را که مجموع آن ها S است، در نظر بگیریم. سه تایی a ، b و c را همان سه تایی ای در نظر گرفتیم که حاصل ضرب آن ها بزرگترین مقدار است. ابتدا ثابت کردیم هر زوج از سه عدد a ، b و c را که انتخاب کنیم، باید با هم برابر باشند. اگر بتوانیم این حکم را ثابت کنیم، آن گاه برابر بودن سه عدد نتیجه می شود. ابتدا نشان دادیم: $a = b$. ما این اثبات را از راه تناقض نشان می دهیم. a و b دو حالت داشته باشند؛ یا برابرند یا نابرابر. فرض می کنیم a و b برابر نباشند. اگر $a + b = R$ ، آن گاه: $ab < (\frac{R}{2})^2$. (چرا؟) بنابراین، داریم:

$$abc < (\frac{R}{2})(\frac{R}{2})c$$

اکنون $\frac{R}{2}$ ، $\frac{R}{2}$ و c سه عدد با مجموع S هستند؛ بنابراین، در مجموعه‌ی سه تایی ها با مجموع S هستند که حاصل ضرب آن ها از abc بزرگ تر است. این یک تناقض است؛ زیرا فرض کرده بودیم abc بزرگترین حاصل ضرب سه تایی ها هستند. در نتیجه، a و b نمی توانند نابرابر باشند؛ پس: $a = b$. پس از این اثبات - که نفس گیر هم بود! - خواستیم حکم $b = c$ را ثابت کنیم که متوجه شدیم همه‌ی مراحل اثبات مثل حالت $a = b$ است؛ بنابراین، نتیجه گرفتیم:

$$a = b = c = \frac{S}{3}$$

پس، بزرگ‌ترین مقدار برابر $(\frac{S}{3})^3$ است. در نتیجه، ثابت کردیم که اگر x و y و z سه عدد

حقیقی مثبت با مجموع S باشند، آن‌گاه: $xyz \leq (\frac{S}{3})^3$ و تساوی دقیقاً در $x=y=z$ اتفاق می‌افتد.

اگر در این نتیجه، S را با $x+y+z$ جایگزین کنیم، خواهیم داشت: $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$ که

تساوی در حالت $x=y=z$ اتفاق می‌افتد. این، همان تعمیم نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی است.

آسانی دیگر: برای هر سه عدد حقیقی نامنفی x و y و z داریم

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \geq 0$$

حال، طرفین را در $x+y+z$ که مقداری غیر منفی است، ضرب می‌کنیم.

$$(x+y+z)((x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)) \geq 0$$

و با ساده کردن سمت چپ، نتیجه می‌شود:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$$

فرض می‌کنیم: $x = \sqrt[3]{a}$ ، $y = \sqrt[3]{b}$ و $z = \sqrt[3]{c}$ و نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

مثال زیر کاربردی از این تعمیم نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی است.

مکعب و مکعب مستطیل‌ها

مسئله‌ی ۳: ثابت کنید بین همه‌ی مکعب مستطیل‌هایی که مساحت جانبی ثابتی دارند، مکعب

دارای بیش‌ترین حجم است.

سه‌یال مکعب مستطیل را a ، b و c بگیرید با S و V نیز به ترتیب مساحت کل و حجم

مکعب مستطیل را نمایش دهید، پس:

$$S = 2(ab + bc + ca) \quad V = abc$$

روی مسئله کار کنید و سپس راه‌حل‌ها را به بحث بگذارید.

در این‌جا یکی از کاربردهای زیبا و غیر منتظره‌ی نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی

در حالت سه عدد را ارائه می‌کنیم. در بخش‌های پیش، راه‌کارهای حل مسئله (راه‌کار حدس و

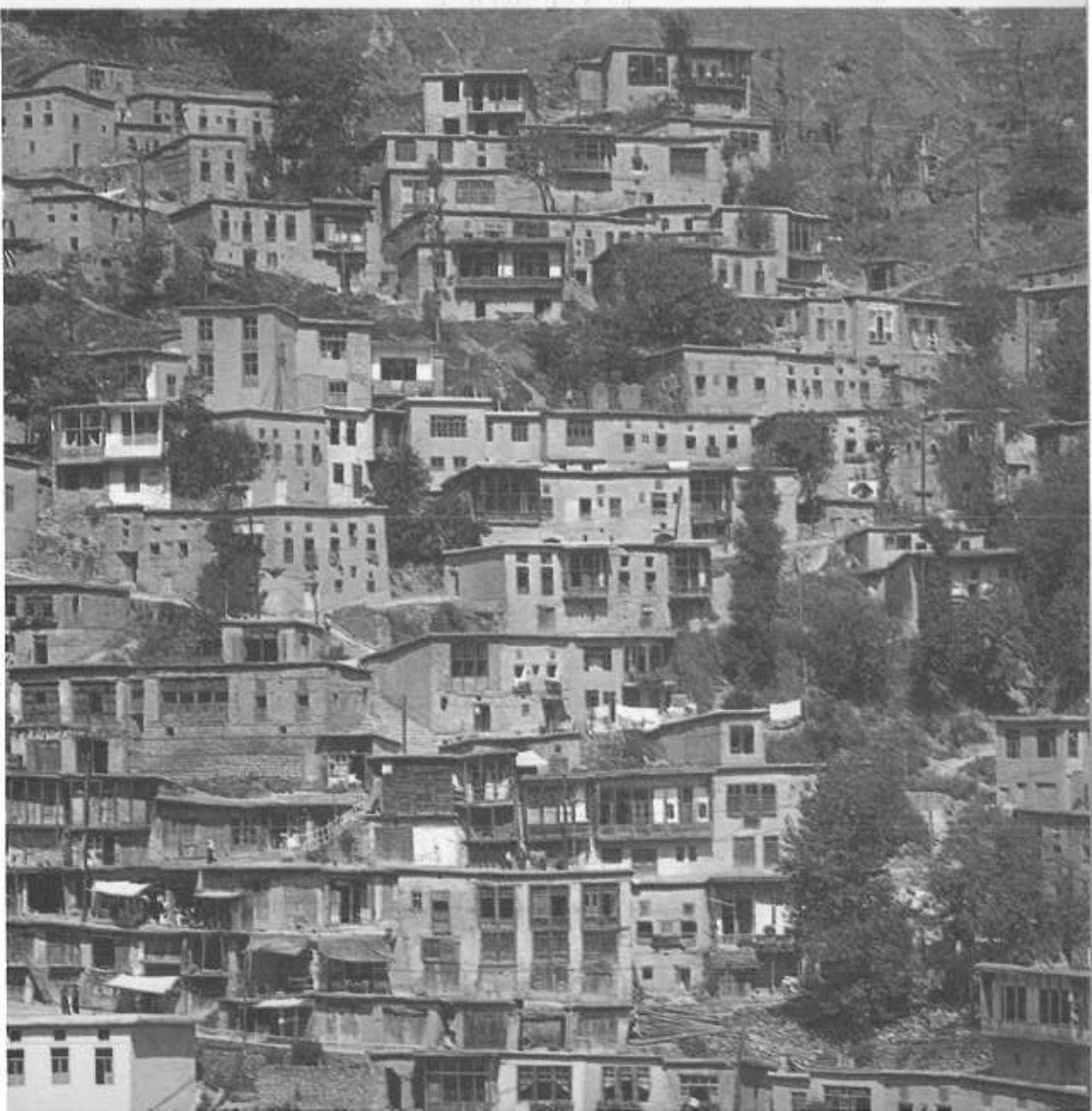
آزمایش)، مسئله‌ی زیر را بررسی کردیم.

«در بین مثلث‌های با محیط ثابت، مثلث متساوی‌الاضلاع بیش‌ترین مساحت را دارد.»

برای حل این مسئله از دستور هرون برای مساحت مثلث استفاده کردیم. دستور هرون براساس محیط و اندازه‌های سه ضلع به صورت زیر بیان می‌شود.

اگر a و b و c اندازه‌های سه ضلع مثلث و $P = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط باشد، آن‌گاه مساحت

مثلث برابر است با: $S = \sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}$



راه حل: می توان دستور هرون را به صورت زیر هم نوشت.

$$S = \sqrt{P} \times \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

اکنون، نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی در حالت سه عدد را برای $x = p-a$ ،

$$y = p-b, z = p-c \text{ به کار می بریم.}$$

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$

بنابراین:

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c}{3}$$

یا:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3$$

و بیش ترین مقدار حاصل ضرب [سمت چپ] وقتی اتفاق می افتد که

$$p-a = p-b = p-c$$

ادامه ی مسئله را خودتان انجام دهید.



مسئله ها

۱. ثابت کنید اگر a, b و c سه عدد حقیقی غیر منفی باشند، آن گاه:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

۲. یک مستطیل با مساحت ثابت، چه موقع کوچک ترین محیط را داراست؟

۳. یک مکعب مستطیل با حجم ثابت، چه موقع کوچک ترین مساحت کل را داراست؟

۴. اگر a, b و c عددهای صحیح و مثبت باشند که $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ ، آن گاه ثابت

$$\text{کنید } abc \leq 1.$$

۵. اگر a, b و c عددهای حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(a^2c + b^2a + c^2b) \geq 9a^2b^2c^2$$

۶. برای هر دو عدد حقیقی و غیرمنفی a و b ثابت کنید:

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$$

تساوی چه موقع برقرار است؟

۷. اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند که $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ، ثابت کنید:

$$x + y + z \leq 2 + xyz$$

۸. ثابت کنید اگر مجموع سه عدد حقیقی مثبت، مقدار ثابتی باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی

بیش‌ترین مقدار خود را دارد که این سه مقدار با هم مساوی باشند.

۹. برای اعداد حقیقی و دلخواه a و b و c احکام زیر را ثابت کنید.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \quad \text{(ب) اگر } a < b+c \text{، آنگاه}$$

۱۰. الف) ثابت کنید اگر برای هر چهار عدد مثبت a, b, c, d داریم:

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

ب) فرض کنید برای عدد طبیعی n داده شده و هر دنباله $a_1, \dots, a_n$ از اعداد مثبت داشته

باشیم:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

ثابت کنید برای هر دنباله $b_1, \dots, b_{n-1}$ از اعداد مثبت خواهیم داشت:

$$\sqrt[n-1]{b_1 \cdots b_{n-1}} \leq \frac{b_1 + \cdots + b_{n-1}}{n-1}$$

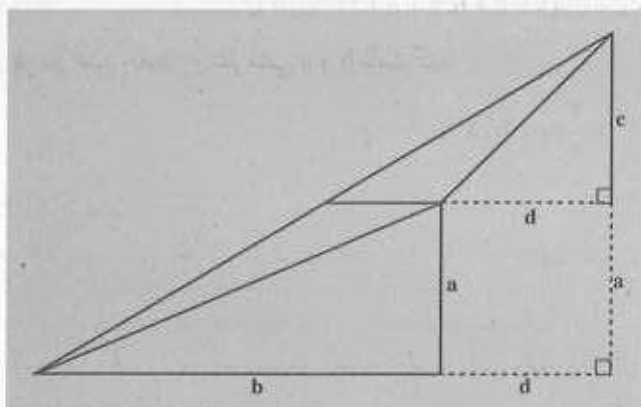
ج) ثابت کنید برای هر دنباله $a_1, \dots, a_n$ از اعداد مثبت داریم:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

۱۱. نشان دهید برای اعداد مثبت a, b, c و d .

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad \text{(الف) اگر } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{، آنگاه}$$

ب) شکل زیر نیز یک اثبات بدون کلام برای این نابرابری است. آن را توصیف کنید.



ب) آیا این نابرابری برای اعداد حقیقی دلخواه برقرار است؟ دلیل ارائه کنید.

ت) آیا می‌توان به کمک این نابرابری نشان داد که بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویای

متمايز وجود دارد.

۱۲. فرض کنید اعداد $a_1, \dots, a_n$ اعدادی مثبت باشند، میانگین حسابی آن‌ها را A و میانگین

هندسی آن‌ها را B می‌نامیم. از بین $a_1, \dots, a_n$ اعدادی را که بزرگتر از میانگین حسابی هستند

انتخاب می‌کنیم و میانگین آن‌ها را A_1 می‌نامیم، همچنین اعدادی که بزرگتر از میانگین هندسی هستند

انتخاب می‌کنیم و میانگین آن‌ها را B_1 می‌نامیم. آیا $B_1 \leq A_1$ همواره برقرار است؟

۱۳. فرض کنید اعداد $a_1, \dots, a_n$ اعدادی مثبت با میانگین حسابی A باشند. از بین $a_1, \dots, a_n$

اعدادی را که بزرگتر از میانگین A هستند انتخاب می‌کنیم و میانگین حسابی آن‌ها را A_1 می‌نامیم. آیا

می‌توان میانگین حسابی اعدادی که کوچکتر از میانگین A هستند را با استفاده از A_1 محاسبه

کرد؟

۱۴. میانگین حسابی با مفهوم فیزیکی مرکز جرم ارتباط دارد. آیا می‌توانید مفهوم میانگین

هندسی را با یکی از مفاهیم فیزیک مربوط کنید؟

۱۵. آیا به نظر شما نامساوی میانگینها یک نامساوی نابديهی است، یا اینکه دو طرف نابرابر از

هم بسیار فاصله دارند؟



قله‌ها به ابرها نزدیک‌ترند. ابرها
نمادی برای اندیشه و تفکرند. رفتن
به قله‌ها، تله‌ها به اندیشه‌ها متصل
می‌کند. از پستی‌ها که عبور کنی، به
بلندای اندیشه می‌رسی!

۴-۶- مهارت تعمیم دادن و نابرابری کوشی - شوارتز

هر اندازه که یک نابرابری کاربردهای بیش‌تری داشته باشد، با ارزش‌تر است. بعضی از نابرابری‌ها هم در علم ریاضی و هم در کاربردهای ریاضی در علوم دیگر کاربرد دارند که این امر بر اهمیت آن‌ها می‌افزاید. نابرابری کوشی - شوارتز یکی از این گونه نابرابری‌هاست.

این نابرابری از حالت‌های ساده در ریاضیات دبیرستانی شروع می‌شود و به حالت‌های کلی‌تر و پیچیده‌تر در ریاضیات پیشرفته تعمیم پیدا می‌کند. این ویژگی اهمیت نابرابری کوشی - شوارتز را چندین برابر کرده است.

نابرابری کوشی - شوارتز: برای هر چهار عدد حقیقی و مثبت a_1, a_2 و b_1, b_2

داریم:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2) \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

پیش از این که به بحث ادامه دهید، برای اثبات این نابرابری تلاش کنید. دانش‌آموزان کلاس حدود ده دقیقه روی این مسئله کار کردند. سپس معلم از بین افراد داوطلب سه نفر را انتخاب کرد؛ محمود، به دلیل این که دستش را زودتر از بقیه بالا برد و مجتبی و علیرضا به دلیل این که در محاسبات جبری نسبت به هم‌کلاسی‌هایشان مهارت بیش‌تری دارند. راه‌حل‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

محمود راه‌حل خود را این‌گونه بیان کرد. بعضی از راهبردهای حل مسئله، تنظیم جدول نظام‌دار و حدس آزمایش را مورد استفاده قرار دادم و جدولی به‌صورت زیر تشکیل دادم.

a_1	a_2	b_1	b_2	$a_1 b_1 + a_2 b_2$	$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$
۱	۲	۳	۴	$1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$	$\sqrt{1^2 + 2^2} \times \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{5} \times 5$
۵	۶	۷	۸	۸۳	$\sqrt{61} \times \sqrt{112}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-۲	۳	۴	-۵	$-2 \times 4 + 3 \times (-5) = -23$	$\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \times \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{13} \times \sqrt{34}$
-۱	-۲	-۳	-۴	۱۱	$\sqrt{5} \times 5$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

با کمک ماشین حساب، حاصل ضرب رادیکال‌ها را به‌دست آوردم و مقایسه کردم؛ در همه‌ی حالت‌ها نامساوی درست بود! نکته‌ی دیگر این که به‌صورت نابرابری دقت نکرده بودم و حواسم نبود

که شرط مثبت بودن روی اعداد وجود دارد. جالب این است که در مورد اعداد منفی هم نابرابری درست درآمد! بنابراین، این سؤال برای مطرح شد که: آیا شرط مثبت بودن در صورت نابرابری کوشی — شوارتز لازم است؟ شاید اعداد منفی ای پیدا شوند که نابرابری به ازای آن‌ها نادرست باشد! نمی‌دانم!

علیرضا راه حل خود را این گونه ارائه کرد: طرفین نابرابری کوشی — شوارتز را به توان ۲ رساندم و سپس $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \leq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$ آن‌ها را ساده کردم:

$$a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$$

$$a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$$

جملات مساوی را از دو طرف نامساوی حذف کردم و سپس همه‌ی جملات را به یک طرف انتقال دادم.

$$a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 \geq 0$$

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$$

چون رابطه‌ی آخر همواره درست است، پس کار تمام است!

مجتبی قبل از این که راه حل خود را توضیح دهد، گفت: فکر می‌کنم راه حل علیرضا نادرست است! زیرا او از خود نابرابری کوشی — شوارتز استفاده می‌کند در صورتی که در اثبات یک حکم، نمی‌توان از خود آن حکم به عنوان یک رابطه‌ی درست استفاده کرد!

راه حل مجتبی: در واقع من هم مسیری را که علیرضا رفته است، طی کردم و متوجه شدم که نقطه‌ی شروع کجاست! بنابراین از رابطه‌ی

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$$

که برای همه‌ی اعداد حقیقی همواره درست است، شروع کردم. خلاصه‌ی محاسبات من به صورت زیر است:

$$a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 \geq 0$$

$$a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 \geq 2a_1 b_2 a_2 b_1$$

عبارت $a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2$ را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$$a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2) \geq 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2)$$

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$$

از دو طرف جذر می گیریم :

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2)$$

و این همان است که می خواستیم.

در این هنگام، محمد هادی اجازه خواست و گفت : به نظر من، راه حل مجتبی نادرست است ؛ زیرا در آخرین مرحله از عملیات وقتی از طرفین نابرابری جذر می گیریم، بایستی قدر مطلق $(a_1 b_1 + a_2 b_2)$ را در نظر بگیریم. در این صورت نیز حکم به دست نمی آید!

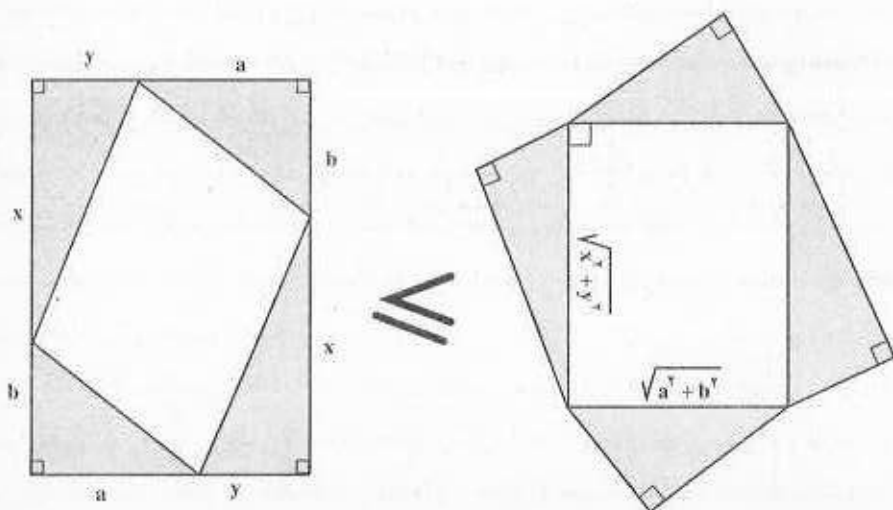
مسئله ۱: درباره ی راه حل های ارائه شده بحث کنید و اثبات کامل و دقیق نابرابری کوشی -

شوارتز را ارائه دهید.

نابرابری کوشی - شوارتز دارای تفسیر هندسی زیبایی است. در ادامه فرصتی فراهم شده است تا به کمک تصاویر هندسی اثباتی دیگر به پا کنید و از زیبایی شهود هندسی لذت ببرید. تفسیر هندسی نابرابری کوشی - شوارتز: اگر a, b, x و y اعداد حقیقی مثبت باشند، آنگاه :

$$(ax + by) \leq \sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{x^2 + y^2}$$

اثبات : (اثبات بدون کلام!)



مسئله ۲: اثبات بدون کلام نابرابری کوشی - شوارتز را به صورت کاملاً روشن توضیح دهید

و تفسیر هندسی آن را بیان کنید.

اکنون زمان آن است که با نگاهی عمیق تر به نابرابری کوشی - شوارتز بپردازیم. راه حل محمود



اگرچه ظاهراً ساده لوحانه است ولی نکات بسیار جالبی دارد! زیرا در صورت نابرابری $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ اعداد حقیقی مثبت و دلخواه هستند و تعداد آن‌ها بی‌شمار است و نمی‌توان همه‌ی اعداد را در نابرابری جایگزین نمود و درستی آن‌را آزمایش کرد. این روش درستی نابرابری را فقط در مورد اعدادی که آزمایش شده‌اند، آشکار می‌کند و در مورد بقیه‌ی اعداد چیزی نمی‌گوید؛ بنابراین، نمی‌تواند اثبات باشد. البته آزمودن یک حکم در چند حالت خاص بی‌فایده هم نیست زیرا حکم را قابل درک و ملموس می‌کند. سؤالی که برای محمود پیش آمد، بسیار مهم و ارزشمند است! (شاید بعضی وقت‌ها حواس پرتی خوب باشد!)

«آیا شرط مثبت بودن اعداد در نابرابری کوشی – شوارتز لازم است؟» چرا این سؤال مهم است؟ بسیاری از مسائل ریاضی و مسائل واقعی زندگی با اعداد مثبت و منفی سر و کار دارند و برای حل آن‌ها از دستورالعمل‌ها، قضیه‌ها و رابطه‌های ریاضی از جمله نابرابری‌ها استفاده می‌شود. اگر نابرابری کوشی – شوارتز فقط در مورد اعداد حقیقی مثبت درست باشد، نمی‌توان از آن در مسائلی که با اعداد منفی سر و کار دارند استفاده کرد.

از طرف دیگر، یکی از روش‌های اساسی پیدایش ایده‌های ریاضی، تعمیم دادن است و

ریاضی دانان همگی از این روش استفاده می کنند. تعمیم دادن یعنی از حالت های خاص به حالت کلی تر رسیدن؛ به عنوان مثال، اگر نابرابری کوشی - شوارتز برای همه ی اعداد حقیقی درست باشد، آنگاه تعمیمی از نابرابری اولیه به دست می آید. بهتر است این فرصت را از دست ندهیم و تلاش برای تعمیم دادن را شخصاً تجربه کنیم.

آیا شرط مثبت بودن در نابرابری کوشی - شوارتز لازم است؟ در هر صورت، استدلال ارائه کنید.

تعمیم دادن یکی از مهارت های تفکر ریاضی است. بهترین راه دستیابی به این مهارت، این است که خود مستقلاً دست به کار شوید و عملیات را انجام دهید. تلاش فکری شما بسیار مهم تر از نتیجه است. حدود ده دقیقه از وقت کلاس برای حل این مسئله صرف شد. کاوه اولین داوطلب بود که تلاش فکری خود را گزارش می داد. مسیر فکری او را بررسی می کنیم.

کاوه: اولین نکته ای که به ذهنم رسید، این بود که اگر هر چهار عدد را منفی کنیم و در نابرابری قرار دهیم، چه اتفاقی می افتد.

$$(-a_1)(-b_1) + (-a_2)(-b_2) \leq \sqrt{(-a_1)^2 + (-a_2)^2} \times \sqrt{(-b_1)^2 + (-b_2)^2}$$

طرف دوم نامساوی همه ی جملات توان ۲ دارد؛ بنابراین، مثبت یا منفی بودن عددها هیچ تأثیری ندارد و طرف اول نیز پس از ساده کردن نسبت به حالت اولیه هیچ تغییری پیدا نمی کند! همه چیز درست از آب درآمد!

ابتدا خیال کردم کار تمام است اما اندکی بعد متوجه شدم که حالت های دیگری نیز برای چهار عدد دلخواه وجود دارد. پس تصمیم گرفتم جدول زیر را تشکیل دهم (شاید به خاطر درس تنظیم جدول نظام دار باشد):

A_1	A_2	B_1	B_2	$A_1B_1 + A_2B_2$	$\leq$	$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \times \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$
$-a_1$	$-a_2$	$-b_1$	$-b_2$	$(-a_1)(-b_1) + (-a_2)(-b_2)$	?	$\sqrt{(-a_1)^2 + (-a_2)^2} \times \sqrt{(-b_1)^2 + (-b_2)^2}$
$-a_1$	$-a_2$	$-b_1$	b_2	$(-a_1)(-b_1) + (-a_2)b_2$	?	$\sqrt{(-a_1)^2 + (-a_2)^2} \times \sqrt{(-b_1)^2 + (b_2)^2}$
$-a_1$	$-a_2$	b_1	$-b_2$	$(-a_1)b_1 + (-a_2)(-b_2)$	?	$\sqrt{(-a_1)^2 + (-a_2)^2} \times \sqrt{b_1^2 + (-b_2)^2}$
$-a_1$	$-a_2$	b_1	b_2	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			

تصمیم گرفتم در هر حالت عبارت ها را ساده کنم. در حالت اول همان نابرابری اولیه به دست

آمد که درستی آن قبلاً ثابت شده است :

$$a_1 b_1 + a_7 b_7 \leq \sqrt{a_1^2 + a_7^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_7^2}$$

حالت دوم را ساده کردم : رابطه‌ی زیر به دست آمد.

$$a_1 b_1 - a_7 b_7 \leq \sqrt{a_1^2 + a_7^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_7^2}$$

انتظار داشتم مانند حالت اول به نابرابری اولیه برسم! انگار مسئله‌ی جدیدی است. در سمت چپ نابرابری به جای جمع، تفریق داریم! چیزی به ذهنم نرسید! پس تصمیم گرفتم حالت سوم را نیز ساده کنم :

$$-a_1 b_1 + a_7 b_7 \leq \sqrt{a_1^2 + a_7^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_7^2}$$

این حالت هم مسئله‌ی جدیدی شد! تقریباً ناامید شدم! شاید مسئله در این حالت‌ها نادرست باشد. در همین حال، کار محمود به ذهنم رسید. با جایگزینی اعداد ساده، هر دو نابرابری را آزمایش کردم. نابرابری‌ها در این حالت‌های خاص درست بودند! شاید نابرابری کوشی - شوارتز برای تفریق هم درست است!

پرویز اجازه گرفت و با اعتراض گفت : شما که نتوانسته بودی مسئله را حل کنی، چرا داوطلب شدی؟

معلم گفت : زیاد تند نروید! قرار بر این است که هر کس تلاش فکری خودش را ارائه کند. در این مطالب چیزهایی وجود دارد که از حل مسئله مهم‌تر است! بهتر است به آن‌ها فکر کنید. همه‌ی حالت‌های b_7, b_1, a_7, a_1 را در نظر بگیرید و جدول را کامل کنید. آیا با این روش نتیجه‌ی به دست آمده درست خواهد بود؟

محمد هادی که در اثبات نابرابری کوشی - شوارتز بسیار خوب عمل کرده بود، راه حل خود را این گونه توضیح داد : همه‌ی مراحل اثبات قبلی در این حالت نیز برقرار است. فقط در آخرین مرحله وقتی از طرفین نابرابری جذر می‌گیریم، بایستی قدر مطلق $a_1 b_1 + a_7 b_7$ را در نظر بگیریم! یعنی، از رابطه‌ی :

$$(a_1 b_1 + a_7 b_7)^2 \leq (a_1^2 + a_7^2) \times (b_1^2 + b_7^2)$$

جذر می‌گیریم! داریم :

$$|a_1 b_1 + a_7 b_7| \leq \sqrt{a_1^2 + a_7^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_7^2}$$

دلیل این که در طرف اول نابرابری قدر مطلق لازم است، این است که $a_1 b_1 + a_7 b_7$ می‌تواند منفی باشد.

پس از ارائه‌ی این دو راه حل، کامران نیز اجازه خواست و گفت : به نظر من روش محمد هادی درست است اما با نامساوی اولیه تفاوت دارد. این یک نابرابری جدید است.

مسئله ۳: درباره‌ی درستی یا نادرستی راه‌حل‌های کاوه و محمدهادی بحث کنید. کدام یک

را ترجیح می‌دهید؟ در مورد نظر کامران چه می‌توان گفت؟

تعمیم‌های دیگر: اکنون زمان آن است که از جزئیات و محاسبات خارج شویم و بر بلندای قله‌ای بنشینیم و جریان بحث را دوباره مرور کنیم. به دنبال اثبات نابرابری کوشی - شوارتز بودیم که این سؤال زیبا سر راهمان سبز شد! که آیا شرط مثبت بودن اعداد a_1, a_2, b_1, b_2 در نابرابری لازم است؟ در فرآیند بررسی این سؤال به نتایج جدیدی رسیدیم و تعمیمی از نابرابری اولیه به دست آمد. در راه‌حل به ظاهر ناخوشایند کاوه، نکاتی به چشم می‌خورد که اهمیت آن‌ها آشکار نیست. او مسئله را به مسئله‌های کوچک‌تر (راهبرد تبدیل مسئله به زیر مسئله‌ها) تبدیل کرد! به این ترتیب سؤال جدیدی ایجاد شد:

آیا برای اعداد حقیقی دلخواه a_1, a_2, b_1, b_2 نابرابری

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

برقرار است؟ آیا در این صورت نابرابری تعمیم پیدا می‌کند؟

نباید ناامید شوید!

بسیاری از مسئله‌ها در آغاز گنگ و غیرقابل حل به نظر می‌رسند:

اگر تلاش کنید، می‌توانید گام‌های مؤثری بردارید.

پس از تلاش ادامه‌ی بحث را مطالعه کنید.

همگی دانش‌آموزان مشغول کار روی مسئله شدند. مجتبی و محمدهادی زودتر از بقیه داوطلب

شدند تا راه‌حل‌هایشان را ارائه کنند.

راه‌حل مجتبی: من از روش حل مسئله‌ی کاوه استفاده کردم. در این روش مسئله‌های جدیدی

به دست می‌آید که عبارتند از:

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad (1)$$

$$-a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad (2)$$

$$-a_1 b_1 - a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad (3)$$

چون b_1, b_2, a_1, a_2 مثبت هستند، بنابراین $a_1 b_1$ و $a_2 b_2$ مثبت می‌باشند. از طرف دیگر،

تفریق دو عدد مثبت همواره کوچک‌تر از جمع آن‌هاست؛ یعنی: $a_1 b_1 - a_2 b_2 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$

با توجه به این که برای اعداد حقیقی و مثبت نابرابری کوشی - شوارتز برقرار است،
پس :

$$a_1b_1 - a_2b_2 \leq a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

در نتیجه، نابرابری (۱) درست است.

- نابرابری (۲) نیز همانند (۱) درست است!

- در حالت (۳) داریم :

$$-a_1b_1 - a_2b_2 = -[a_1b_1 + a_2b_2]$$

چون $a_1b_1 + a_2b_2$ همواره مثبت است، پس :

$$-[a_1b_1 + a_2b_2] \leq a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

از این رابطه چنین نتیجه می شود که نابرابری در حالت (۳) نیز درست است.

بنابراین، می توان نوشت :

$$a_1b_1 \pm a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

این نابرابری به روشنی تعمیمی از نابرابری اولیه است.

محمد هادی مسیر دیگری را برای حل این مسئله پیموده است. او روش کار خودش را

به صورت زیر شرح داد :

من روش اثبات نابرابری اولیه را در پیش گرفتم ؛ یعنی، از رابطه ی زیر شروع کردم :

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$$

ولی نتوانستم به نتیجه برسم. به نظرم رسید که نقطه ی شروع درست نیست. به این دلیل از اول

شروع کردم!

$$a_1b_1 - a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

طرفین را به توان ۲ رساندم :

$$(a_1b_1 - a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

این رابطه را ساده کردم تا به رابطه ی زیر رسیدم.

$$(a_1b_2 + a_2b_1)^2 \geq 0$$

نقطه ی شروع حل مسئله مشخص شد (یک بار محاسبات را به طور کامل انجام دهید).

$$(a_1b_2 + a_2b_1)^2 = a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + 2a_1b_2a_2b_1 \geq 0$$

جمله ی سوم را به طرف دیگر نابرابری انتقال می دهیم ؛ رابطه ی زیر به دست می آید :

$$a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \geq -2a_1b_2a_2b_1$$

عبارت $a_1^2 b_1^2 + a_7^2 b_7^2$ را به طرفین نابرابری اضافه می‌کنیم.

$$\underbrace{a_1^2 b_1^2 + a_7^2 b_7^2}_{\geq a_1^2 b_1^2 + a_7^2 b_7^2} + a_1^2 b_7^2 + a_7^2 b_1^2 \geq \underbrace{a_1^2 b_1^2 + a_7^2 b_7^2}_{\geq a_1^2 b_1^2 + a_7^2 b_7^2} - 2a_1 b_7 a_7 b_1$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

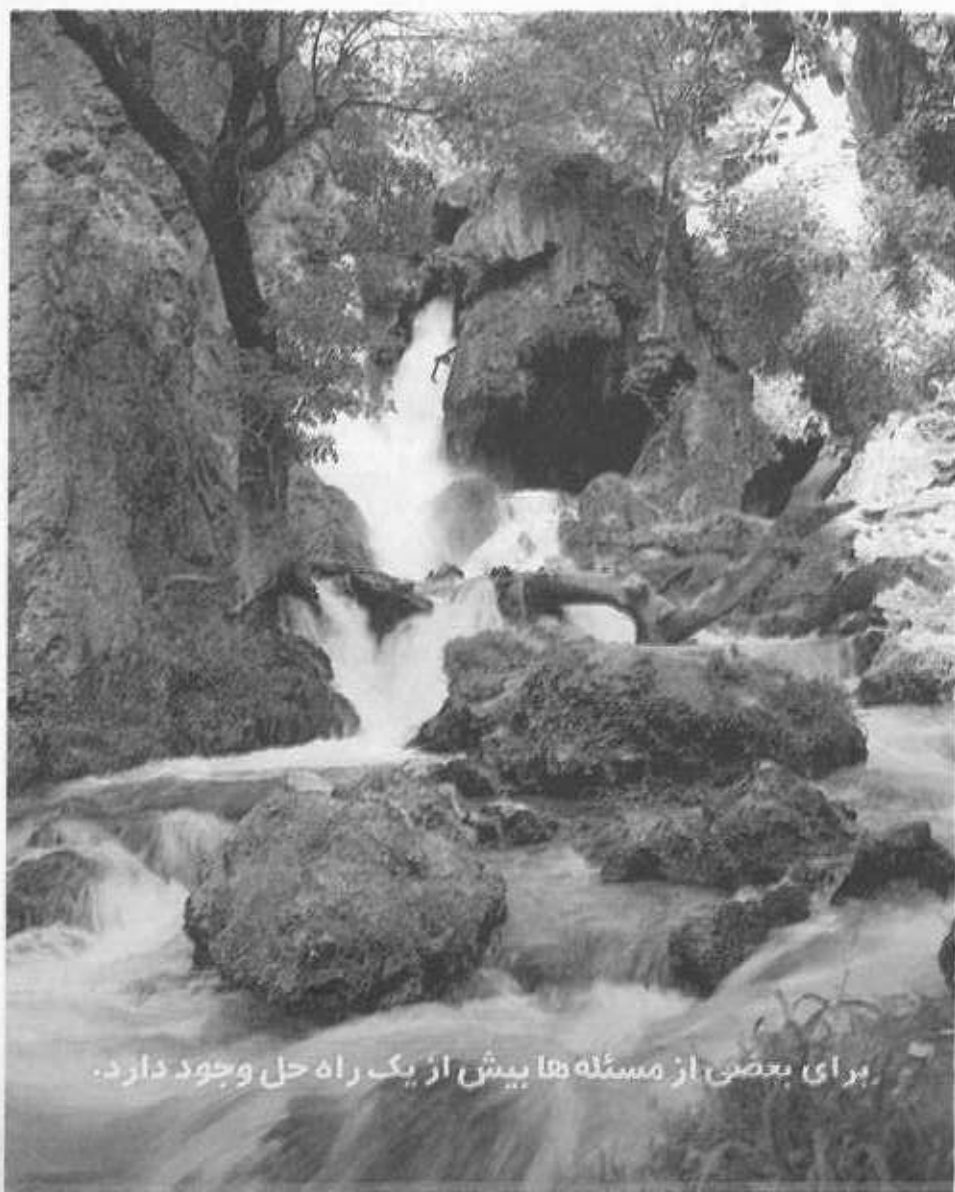
$$(a_1^2 + a_7^2)(b_1^2 + b_7^2) \geq (a_1 b_7 - a_7 b_1)^2$$

از دو طرف جذر می‌گیریم:

$$\sqrt{a_1^2 + a_7^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_7^2} \geq |a_1 b_7 - a_7 b_1|$$

بنابراین، نابرابری در حالت تفریق نیز درست است و می‌توان نوشت:

$$|a_1 b_7 \pm a_7 b_1| \leq \sqrt{a_1^2 + a_7^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_7^2}$$



برای بعضی از مسئله‌ها بیش از یک راه حل وجود دارد.

مسئله ۴: در مورد این دو راه حل بحث کنید: کدام راه حل را می‌پسندید؟ چرا؟ مشاهده کردیم که دو راه حل متفاوت مطرح شد و دو نتیجه‌ی متفاوت به دست آمد. این نتیجه‌ها، هر دو درست و تعمیمی از نابرابری کوشی - شوارتز هستند. در این جا سؤال‌هایی مطرح می‌شود که دو نمونه از آن‌ها را بیان می‌کنیم.

۱. آیا بین دو نتیجه‌ی به دست آمده از راه حل‌های مجتبی و محمد هادی رابطه‌ای وجود دارد؟ کدام بهتر است؟

۲. آیا برای نابرابری کوشی - شوارتز تعمیم یا تعمیم‌های دیگری وجود دارد؟ اکنون نوبت آن رسیده است که دمی بیاساییم و به مغزمان استراحت بدهیم. اگر در بررسی و تصمیم‌گیری درباره‌ی دو سؤال بالا با مشکل روبه‌رو شدید، ابتدا مسایل این بخش را حل کنید!



مسئله‌ها

۱. برای دو عدد حقیقی و مثبت x و y ثابت کنید:

$$(x+y) \leq \sqrt{2x^2+2y^2} \quad (\text{الف}) \quad (1+xy) \leq \sqrt{1+x^2} \sqrt{1+y^2} \quad (\text{ب})$$

۲. برای شش عدد حقیقی و مثبت $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ثابت کنید:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

۳. اگر a_1, a_2, a_3 سه عدد حقیقی و مثبت باشند که $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ ، ثابت کنید

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq \frac{1}{3}$$

۴. اگر a, b, c عددهای حقیقی و مثبتی باشند، ثابت کنید:

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2$$

۵. برای هشت عدد حقیقی $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ ثابت کنید:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$$

۶. برای اعداد حقیقی a_1, a_2, b_1, b_2 ثابت کنید :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq |a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

۷. درس «مهارت تعمیم دادن و نابرابری کوشی - شوارتز» در یک کلاس واقعی اجرا شده

است. در پاسخ به تعمیم‌های این نابرابری دانش آموزان دو تعمیم زیر را ارائه کردند. آن‌ها را بررسی کنید.

$$a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \times \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

$$\frac{a_1 b_1}{c_1} + \frac{a_2 b_2}{c_2} \leq \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \times \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

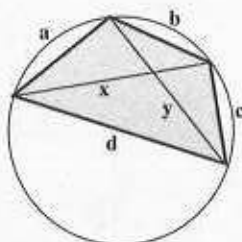
۸. اگر α و β دو زاویه باشند، داریم :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

آیا می‌توانید بین این رابطه و نامساوی کوشی - شوارتز ارتباط برقرار کنید؟

۹. بنابر قضیه بطلمیوس اضلاع و قطرهای یک چهارضلعی محاطی مانند شکل در رابطه

$ac + bd = xy$ صدق می‌کنند.



آیا می‌توانید بین این قضیه و نابرابری کوشی - شوارتز ارتباط برقرار کنید؟

۱۰. فرض کنید دنباله‌ی $a_1, \dots, a_n$ و دنباله‌ی $b_1, \dots, b_n$ داده شده باشند برای هر i داریم

$$0 \leq (a_i x + b_i)^2$$

$$0 \leq (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2$$

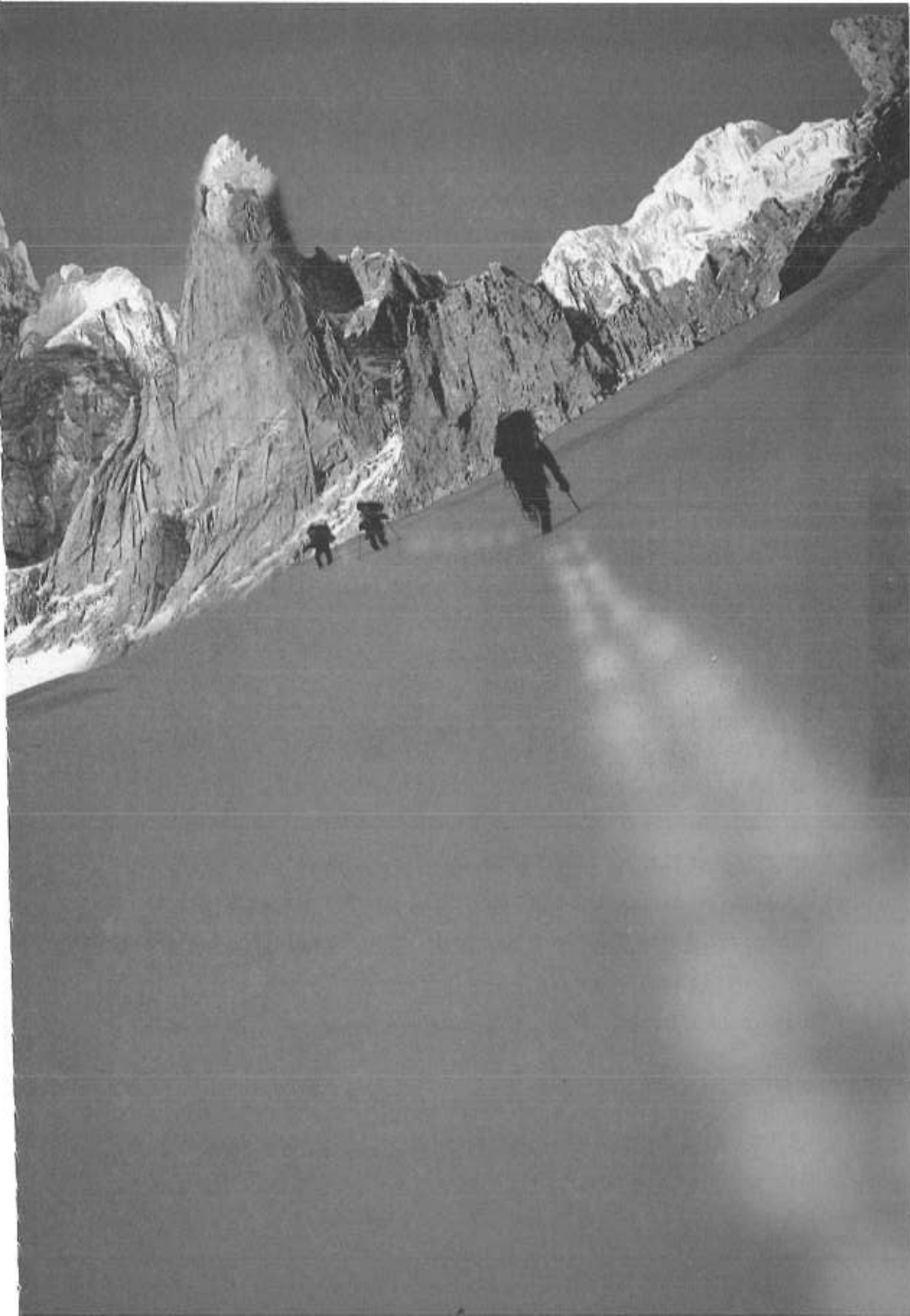
با بسط دادن طرف راست یک معادله درجه دوم بدست می‌آید که همیشه نامنفی است. در مورد

مبین آن چه می‌توان گفت؟

۱۱. فکر می‌کنید کوشی چگونه اولین بار نابرابری خود را اثبات کرد؟

۱۲. آیا به نظر شما نابرابری کوشی - شوارتز یک نابرابری نابديهی است، یا اینکه دو طرف

نابرابری از هم بسیار فاصله دارند؟



در مسیر کشف ریاضیات

عصبانی و ناراحت بود، تیره‌های امتحان بدها در حد انتظارش نبود. با خود می‌گفت: قضیه‌ی فیثاغورس که در سال قبل تدریس شده، بارها در درس امسال تکرار شده است و منطقی و مختلفی در مورد آن حل کرده‌ام. چرا در این مورد هم اکثریت اشتباه کرده‌اند؟ از نظر او این اشتباه کاملاً غیرعادی بود. تصمیم گرفت از تک‌تک دانش‌آموزان پرسد که چرا در مورد قضیه‌ی فیثاغورس اشتباه کرده‌اند. دانش‌آموزان یا اضطراب و ترس از عصبانیت و خشم او یا پاسخ‌هایی می‌دادند که بیش‌تر بهانه بود تا دلیل یکی از دانش‌آموزان در پاسخ گفت:

اگر می‌دانستم، فیثاغورس «چرا» و «چگونه» این قضیه را کشف کرده است، آن‌گاه قضیه‌ی فیثاغورس را برای همیشه می‌فهمیدم!

دیگر بهانه نبود؛ پاسخ‌های حکیمانه بود. هرچه بیش‌تر به این پاسخ فکر کرد، به نظرش

راستی آنچیز قضیه‌ی فیثاغورس کشف شد؟ این قضیه چگونه کشف شد؟ قضیه‌ی تالس چه طور؟

به‌طور کلی، چرا مفاهیم ریاضی، تعریف‌ها، قضیه‌ها کشف می‌شوند؟ این کارها چگونه انجام می‌گیرد؟ مردمانی که این کشف‌ها را انجام می‌دهند، چه کارهایی می‌کنند که می‌توانند کشف کنند؟ آیا در خواب می‌بینند یا به آن‌ها الهام می‌شود؟ آیا قضیه‌های ریاضی، تعریف‌های ریاضی و به‌کلی ایده‌های ریاضی به یک‌باره کشف می‌شوند؟ آیا این ایده‌ها در زمانی که کشف شده‌اند، به همین صورت بوده‌اند یا تغییراتی داشته‌اند؟ پس از این که قضیه‌ای کشف شد، چگونه اثبات می‌شود؟ مسئله حل‌کن‌های ماهر برای اولین بار چگونه یک مسئله را حل می‌کنند؟ راه‌حل‌ها، اثبات‌ها چگونه به ذهن این‌گونه مردمان می‌رسد؟ سرچشمه‌ها کجاست؟...

اگر در رستوران گران‌قیمتی غذا بخورید، دلتان می‌خواهد که به آشپزخانه، انبار مواد خام، محل تمیزکردن سبزی‌ها و میوه‌ها، محل جداکردن مواد زاید گوشت‌ها، محل شستن ظروف و شاید آشغال‌ها سری بزنید. پشت صحنه چندان هم زیبا نیست؛ شاید حالتان را دگرگون کند! اما همه‌ی

غذاهای خوشمزه، لذیذ، رنگارنگ و آراسته از آن پشت‌صحنه‌ها می‌آیند! برای یافتن پاسخ‌هایی برای سؤال‌ها، بیاید با هم به پشت‌صحنه ریاضی برویم؛ آستین‌ها را بالا بزنیم و دست‌به‌کار شویم. یادتان باشد در شروع کار، پشت‌صحنه چندان هم خوشایند نیست!

۵-۱- روزگاران قدیم و محصور کردن مرتع‌ها

در روزگاران قدیم که کار مردم بیش‌تر کشاورزی و گله‌داری بود، زمین کشاورزی و مرتع اهمیت زیادی داشت. در آن زمان، برای تقسیم مرتع‌ها از روش‌های گوناگونی استفاده می‌شد. یکی از روش‌ها این بود که هر گله‌دار با استفاده از یک ریسمان معیار به درازای مشخص، سهم خود را از مرتع جدا می‌کرد و سپس آن را با علامت‌هایی نشانه‌گذاری می‌نمود. فرض کنید درازای ریسمان معیار ۳۰۰ متر است. چگونه می‌توان با این ریسمان بیش‌ترین مقدار مرتع را محصور کرد؟ ایست!

اینک فرصت پیش روی شماست. از کجا باید شروع کنید؟ از صورت مسئله باید شروع کرد؛ اول باید مسئله را بفهمید. مجهول چیست؟ داده‌ها کدام‌اند؟ شرط چیست؟ ... آیا می‌توانید موقعیت مسئله را تجسم کنید؟ سعی کنید بدون توجه به جزئیات، مسئله را به صورت یک کل تصور کنید. سعی کنید شکلی رسم کنید یا طرحی بکشید. راهبردها را در نظر آورید؛ فکر می‌کنید کدام یک می‌تواند به حل این مسئله کمک کند؟ از همان راهبردها شروع کنید. به این جا که رسیدید، کتاب را ببندید! سعی کنید فقط از توان فکری خودتان استفاده کنید.

بچه‌ها آرام آرام با مسئله درگیر شدند. رفته رفته جنب و جوش و تلاش فکری بچه‌ها بیش‌تر می‌شد. معلم از این وضعیت لذت می‌برد و ترجیح می‌داد در کار آن‌ها دخالتی نکند. حدود نیم ساعت گذشته بود که بعضی از گروه‌ها احساس کردند توانسته‌اند مسئله را حل کنند. وقتی هنگام ارائه‌ی فعالیت گروه‌ها رسید، تقریباً همه‌ی گروه‌ها پیشرفتهایی داشتند. مسیر فکری ایمان و آرمان ظرافت‌های فوق‌العاده‌ای داشت. کار آن‌ها مورد تحسین همه قرار گرفت. در این جا به تماشای تلاش فکری و بحث‌های آرمان و ایمان می‌نشینیم.

آرمان: بهتر است صورت مسئله را چند بار بخوانیم و در مورد شرط مسئله، مجهول مسئله و داده‌های مسئله بحث کنیم.

پس از لحظاتی، ایمان گفت: این که چیزی ندارد؛ فقط عبارت «بیش‌ترین مقدار» مهم است و طول ریسمان.

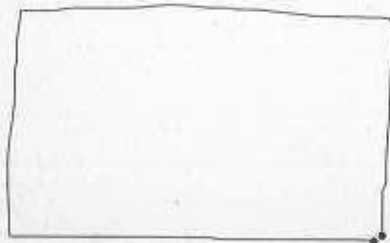
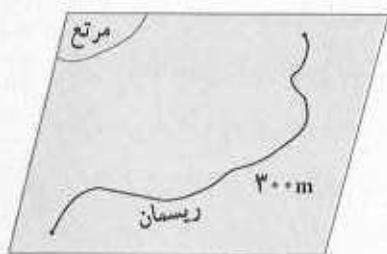
ایمان: موافقم؛ حالا باید چه کار کنیم؟



آرمان: اگر گله دار بودم و گوسفندانم گرسنه بودند، طناب را برمی داشتم و ناحیه‌ی خودم را طوری انتخاب می کردم که از همه بیش تر باشد!

ایمان گفت: پس مسئله حل شد! [هر دو شروع به خندیدن کردند.]

ایمان: فکر بدی نیست؛ چه طور است یک ریمان 300 متری برداریم و در حیاط مدرسه، ناحیه‌ای را که بیش ترین مساحت را داشته باشد، پیدا کنیم؟



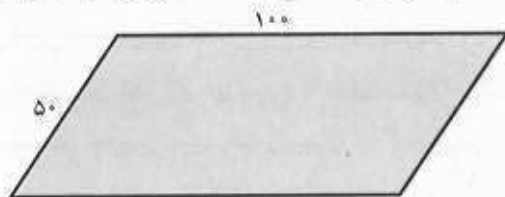
آرمان: به این کار نیازی نیست! فرض کن صفحه‌ی دفتر همان علفزار است و خط هم همان ریمانی است که آن را به هر شکلی می توان درآورد. ایمان: فهمیدم؛ با این ریمان یک ناحیه‌ی مستطیل شکل درست می کنیم و مساحت آن را حساب می کنیم. البته می دانیم محیط آن 300 متر است.

آرمان: مستطیل های دیگری هم می توانیم بسازیم که محیط آن ها 300 متر باشد. باید ببینیم میان همه‌ی این گونه مستطیل ها، مساحت کدام یک از بقیه بیش تر است، اما چگونه؟

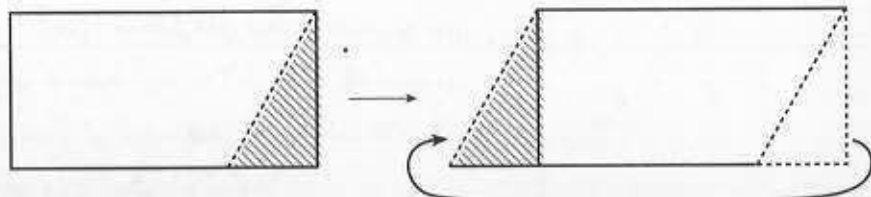
ایمان: حدس و آزمایش، جدول نظام دار. (او فوراً جدول زیر را کشید و گفت: حدس اول - طول ۱۰۰، عرض ۵۰)

طول: b	عرض: a	محیط: $P=2(a+b)$	مساحت: $S=a \times b$
۱۰۰	۵۰	$P=2(100+50)$	$S=100 \times 50 = 5000$
⋮	⋮	⋮	⋮

ناگهان آرمان گفت: راستی! ما قبلاً این مسئله را از راهبرد حدس و آزمایش حل کرده ایم. مساحت زمانی به بیشترین مقدار می رسد که طول و عرض مستطیل برابر باشند! ایمان: درست است، در بین مستطیل هایی که محیط آن ها ثابت است، آن که طول و عرض مساوی دارد، دارای بیشترین مساحت است. پس پاسخ مسئله مربع است. آرمان: عجله نکن! ما فقط می دانیم که اگر ناحیه ها مستطیل شکل باشند، بیشترین مساحت مربوط به حالتی است که طول و عرض برابرند. اگر ناحیه ها را به شکل متوازی الاضلاع (مانند شکل زیر) در نظر بگیریم، تکلیف چیست؟



ایمان: این که واضح است! مساحت مستطیل از مساحت متوازی الاضلاع کم تر می شود. آرمان: اتفاقاً خیلی هم واضح نیست: تو چه دلیلی داری؟ ایمان: من بارها با قوطی کبریت بازی کرده ام وقتی آن را از یک طرف فشار می دهیم به شکل متوازی الاضلاع می شود و کف قوطی بیرون می زند: یعنی، مساحت آن کم تر می شود! آرمان: قبول ندارم: زیرا در درس هندسه دیدیم که از روی یک مستطیل با برش های خاصی می توان متوازی الاضلاع ساخت: به طوری که مساحت آن تغییر نکند، مانند شکل زیر:



ایمان: قبول دارم؛ با این حال کار خراب نمی‌شود، من فکر می‌کنم اگر طول و عرض متوازی الاضلاعی برابر با طول و عرض یک مستطیل باشد، آن‌گاه مساحت آن کم‌تر از مساحت مستطیل یا مساوی با آن است.

آرمان: آیا برای این نکته دلیلی هم داری؟ نکند باز هم قوطی کبریتی (!) فکر می‌کنی؟

ایمان گفت: صبر کن؛ چیزی به ذهنم رسید!

او درحالی‌که با خودش تکرار می‌کرد: قاعده، ارتفاع و ... با خوشحالی گفت: بیا تا حرفم را

ثابت کنم.

آرمان کاملاً قانع شد.

مسئله ۱: بحث آخر آرمان و ایمان را بررسی کنید. آیا استدلال‌های آن‌ها درست است؟

مسئله ۲: آیا می‌توانید استدلال ایمان را حدس بزنید؟ به‌طور کلی، در مورد مساحت‌های

یک مستطیل و یک متوازی الاضلاع که طول و عرض یکسان دارند، چه می‌توان گفت؟

آرمان و ایمان عادت بسیار خوبی داشتند. آن‌ها هر وقت با هم روی یک مسئله که مراحل

مختلف یا راه‌حل طولانی داشت، کار می‌کردند پس از هر گام به عقب باز می‌گشتند و مسیر کارشان

را دوباره نظاره می‌کردند؛ نتایج را جمع‌بندی کرده و گاهی روی استدلال‌ها دوباره دقت می‌کردند.

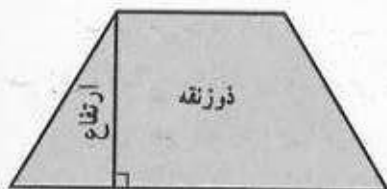
آن دو در جریان بازیگری راه‌حل خودشان بودند که ایمان گفت: شاید باز هم فکر مرا مسخره

کنی، با این حال، شهودی که از فشار دادن قوطی کبریت دارم، هنوز به من می‌گوید که اگر یک

مستطیل را طوری به متوازی الاضلاع تبدیل کنیم که طول و عرض آن ثابت باشد، مساحتش کوچک‌تر

می‌شود. اما استدلال تو هم درست به نظر می‌رسد، نمی‌دانم؛ در هر صورت، نتیجه‌ای که به دست

آورده‌ایم به قوت خود باقی است.



آرمان: راستی! ما تا این جا فقط

متوازی الاضلاع‌ها را با مستطیل‌ها مورد بررسی قرار

داده‌ایم. اگر شکل دوزنقه باشد، چه می‌شود؟

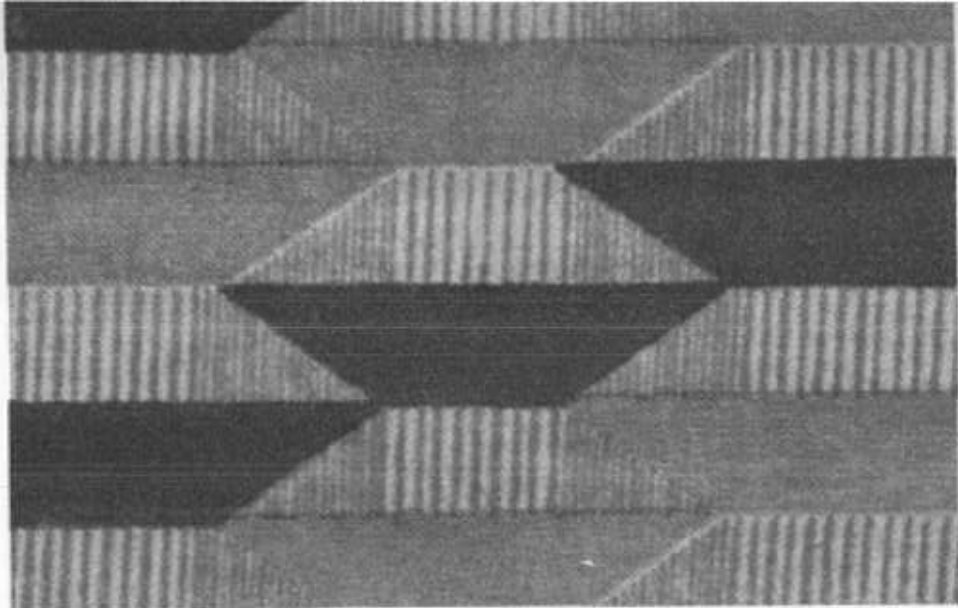
ایمان: راست می‌گویی، مساحت دوزنقه برابر

است با ارتفاع ضرب در نصف مجموع دو قاعده. ما فقط طول ضلع‌ها را می‌دانیم. ارتفاع را چگونه

حساب کنیم؟

آرمان به شکل دوزنقه‌ای خیره شده بود. پس از چند لحظه گفت: حدس من این است که

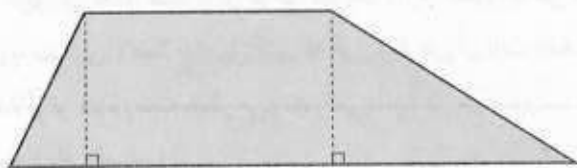
مساحت دوزنقه هم باید از مساحت مستطیل کم‌تر باشد.



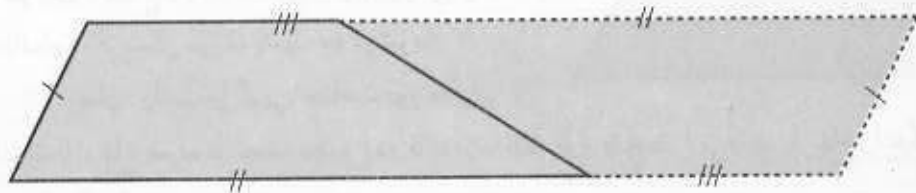
ایمان : چرا؟

آرمان : دلیل خاصی ندارم ؛ داشتم به طور ذهنی یک گوشه‌ی دوزنقه را بُرش می‌دادم و به طرف دیگر می‌چسباندم تا مستطیل درست کنم. احساس می‌کنم مساحتش کم‌تر باشد.

ایمان : در درس هندسه وقتی می‌خواستیم فرمول مساحت دوزنقه را به دست آوریم، از دو رأس قاعده‌ی کوچک دو ارتفاع بر قاعده‌ی بزرگ رسم می‌کردیم. یک مستطیل و دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آمد.



آرمان : عالی شد! یادم آمد ؛ فکر می‌کنم فهمیدم. آن‌گاه شکل زیر را رسم کرد.



آرمان اندکی بعد از رسم کردن این شکل گفت : کار تمام است. مساحتش کم‌تر است. توجه کن تا برایت بگویم.

مسئله ۳: استدلال آرمان چگونه می تواند باشد؟ آیا می توان گفت که: مساحت مستطیلی که محیط آن برابر یک دوزنقه است از مساحت آن دوزنقه بیش تر است؟ دو حالت در نظر بگیرید:

الف - عرض مستطیل برابر یک ساق دوزنقه باشد.

ب - عرض مستطیل از هر دو ساق دوزنقه کوچک تر باشد.

ایمان: تا این جا همه چیز خوب پیش رفت؛ می توانیم نتیجه ی کلی زیر را بگیریم:

«در میان چهارضلعی هایی که محیط ثابت دارند، مربع بیش ترین مساحت را دارد.»

آرمان: این نتیجه گیری درست نیست؛ زیرا ما همه ی چهارضلعی ها را بررسی نکرده ایم و فقط مستطیل ها، متوازی الاضلاع ها و دوزنقه ها را بررسی کرده ایم.

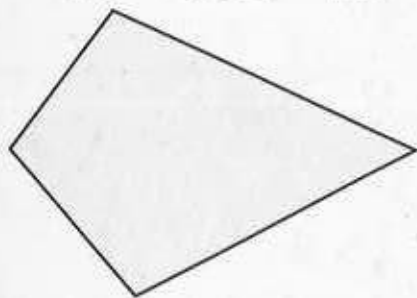
ایمان: یعنی می خواهی بگویی مربع ها و لوزی ها باقی مانده اند؟

آرمان: نه، منظورم این نبود؛ زیرا لوزی نوعی متوازی الاضلاع است و مربع هم نوعی مستطیل است.

ایمان: قبول دارم. نکته ی جالب تر این که با محیط ثابت فقط یک مربع وجود دارد!

آرمان: به نکته ی زیبایی اشاره کردی که من متوجه آن نبودم. منظور من چهارضلعی هایی است

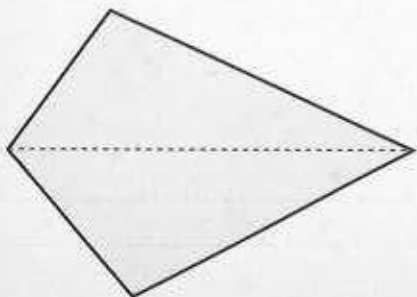
که جزء هیچ کدام از انواع بالا نیستند. در واقع، منظور من چهارضلعی های نامشخص است؛ برای مثال، شکل روبه رو.



ایمان: ما حتی نمی دانیم مساحت این شکل ها چگونه حساب می شود. فقط اندازه ی ضلع ها را در اختیار داریم و حاصل جمع آن ها را.

آرمان: من هم نمی دانم که مساحت این گونه شکل ها را چگونه باید حساب کرد. حتی یادم

نمی آید که قبلاً مساحت چنین شکلی را محاسبه کرده باشیم. البته اگر یکی از قطر ها را رسم کنیم، دو مثلث به دست می آید.



ایمان: اگر بتوانیم مساحت هر کدام از

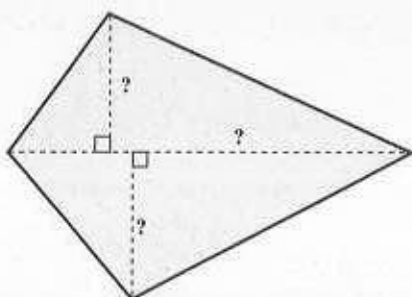
مثلث ها را حساب کنیم، کار تمام می شود.

آرمان: از هر مثلث دو ضلع (ضلع های



در جریان حل مسئله وقتی با مانعی روبه‌رو می‌شویم، نباید ناامید شویم شاید لازم باشد دیدگاهمان را تغییر دهیم و مانع را دور بزنیم.

چهارضلعی) را می‌دانیم، چگونه ضلع سوم (قطر) و ارتفاع هر کدام از مثلث‌ها را پیدا کنیم؟ توجه فکر می‌کنی؟



ایمان: راستش را بخواهی من به چیز دیگری فکر می‌کنم. ما همه‌ی ناحیه‌ها را چهارضلعی می‌گیریم. آیا اگر با ریسمان 300° متری یک ناحیه‌ی مثلثی درست کنیم، مساحت بیش‌تری به‌دست نمی‌آید؟ اگر همه‌ی ناحیه‌ها را مثلثی انتخاب کنیم، نتیجه چه می‌شود؟
آرمان: این که کاری ندارد؛ فوری آن را بررسی می‌کنیم، حدس و آزمایش و جدول. [او سپس خیلی سریع فرمول مساحت را نوشت و جدول زیر را کشید.]

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2}$$

مساحت	ارتفاع	قاعده

در این هنگام آرمان ساکت شد و به فکر فرو رفت!

ایمان: مثل این که مسئله را خیلی سریع بررسی کردی. مشکلی پیش آمده؟
آرمان: وقتی ما با ریسمان یک ناحیه‌ی مثلثی می‌سازیم، فقط اندازه‌ی سه ضلع را می‌دانیم اما زاویه‌ها، ارتفاع‌ها و ... را نمی‌دانیم. من حدس اول را 100° و 120° و 80° گرفتم اما به‌درد نخورد.
ایمان: رابطه‌ی هرون ... ما قبلاً این مسئله را حل کرده‌ایم. اگر ضلع‌های مثلث a و b و c و p نصف محیط مثلث باشد، آن‌گاه

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

آرمان : درست است ؛ مسئله قبلاً حل شده و نتیجه‌ی آن چنین است :

«در میان مثلث‌هایی که محیط یکسان دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیش‌ترین مساحت است».

ایمان : در واقع این مسئله را یک بار در درس راهبرد حدس و آزمایش و یک بار هم در درس نابرابری میانگین حسابی - میانگین هندسی حل کردیم.

آرمان : چه قدر خوب می‌شد اگر رابطه‌ای شبیه رابطه‌ی هرون برای چهارضلعی‌ها وجود داشت.

ایمان در پایان گزارش راه‌حلشان در کلاس، گفت : در این جا خیلی تلاش کردیم تا بتوانیم در مورد چهارضلعی نامشخص به نتیجه برسیم اما به جایی نرسیدیم.

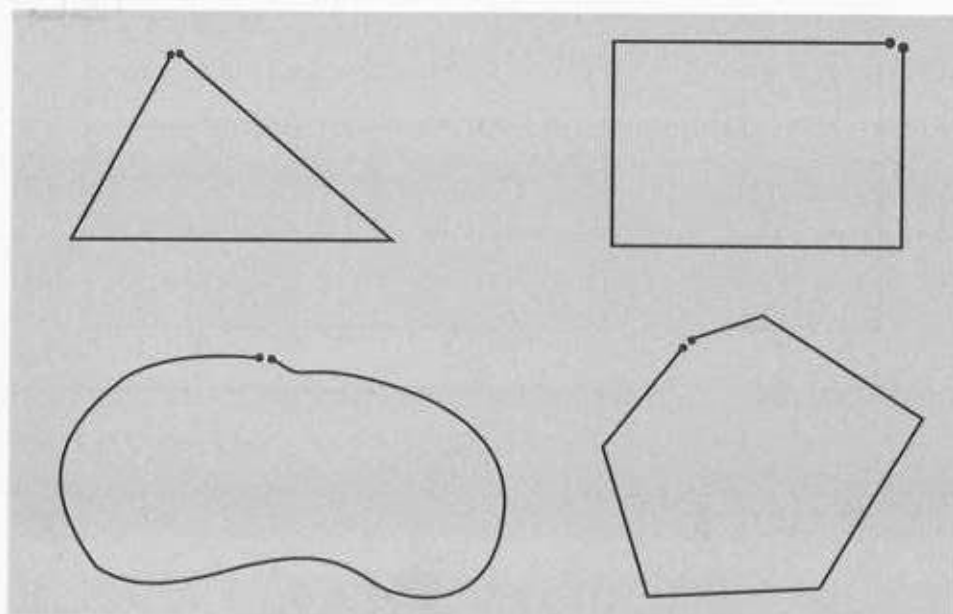
مسئله‌ی ۴: کار آرمان و ایمان را با دقت بررسی کنید ؛ به نظر شما آن‌ها چه چیزهایی را در نظر نمی‌گرفتند؟ چه جاهایی عالی فکر کردند و در چه جاهایی ضعیف بودند؟ اگر در هنگام کار به تماشای آنان می‌نشستید، چه راهنمایی‌ها یا پیشنهادهایی به آن‌ها می‌کردید؟ این مسئله را در کلاس به بحث همگانی بگذارید.

مسئله‌ی ۵: بررسی کنید در بین همه‌ی مثلث‌هایی با یک ضلع ثابت و محیط یکسان، بیش‌ترین مساحت مربوط به کدام مثلث است.

مسئله‌ی ۶: برای اثبات حکمی که ایمان و آرمان به دست آوردند - یعنی، در بین همه‌ی چهارضلعی‌ها با محیط یکسان، مربع بیش‌ترین مساحت را دارد - کافی است نشان دهید که مساحت چهارضلعی‌های نامشخص با محیط یکسان کم‌تر از مساحت مربع با همان محیط است. در کلاس به حل این مسئله اقدام کنید. ناامید نشوید ؛ می‌توانید آن را حل کنید یا دست کم به حل آن نزدیک شوید.

دومین گروهی که کارشان در زمینه‌ی مسئله‌ی «روزگاران قدیم و محصور کردن مرتع‌ها» مورد تحسین قرار گرفت، گروه سه‌نفره‌ی میلاد، محمود و یاور بود. روش کار این گروه متفاوت است و دیدگاه دیگری را مطرح می‌کند که برجستگی‌های خاصی دارد. خلاصه‌ای از فرآیند فکری این گروه را از زبان محمود می‌شنویم.

ما پس از چند بار خواندن صورت مسئله و سؤال‌های بسیار با ارزش و راه‌گشایی که بعد از صورت مسئله آمده است، درک خوبی از مسئله به‌دست آوردیم. درواقع، می‌توانستیم موقعیت مسئله را تجسم کنیم. خیلی زود شکل‌های زیادی رسم کردیم، چند تا از شکل‌ها به‌صورت زیر بود.



در واقع، ریسمان را مانند یک خط فرض کردیم که می‌توان با آن هر نوع شکلی ساخت، این شکل‌ها را هم همان ناحیه‌های محصورشده با ریسمان فرض کردیم. در این جا متوجه شدیم که نمی‌توانیم مساحت همه‌ی شکل‌ها را محاسبه کنیم. این جا بود که یاور گفت بهتر است شکل‌هایی را در نظر بگیریم که می‌توانیم مساحت آن‌ها را محاسبه کنیم. قرار شد فهرستی از شکل‌هایی که می‌توانیم مساحت آن‌ها را به‌دست بیاوریم، تهیه کنیم.

فهرست زیر به‌دست آمد:

مثلث متساوی‌الساقین؛

مثلث متساوی‌الاضلاع؛

مثلث قائم‌الزاویه؛

مستطیل؛

مربع؛

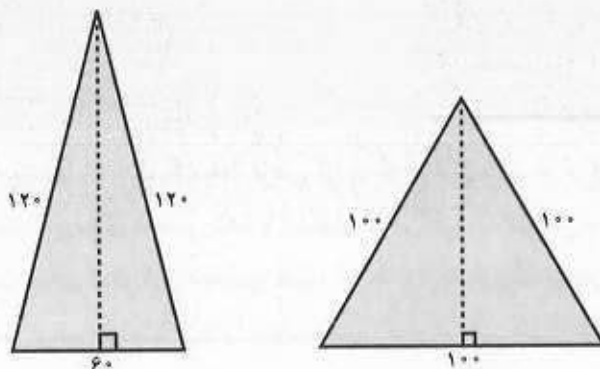
دایره.

ما باید ضلع‌های این شکل‌های هندسی را طوری انتخاب می‌کردیم که حاصل جمع طول ضلع‌های

هر کدام برابر 30° متر باشد؛ بنابراین، به طور ذهنی عدد هایی را به ضلع ها نسبت دادیم و جدول زیر را ساختیم.

مساحت	شکل با محیط 300 متر
5625	مربعی با ضلع 75
5000	مستطیلی با طول و عرض 100 و 50
?	مثلث متساوی الساقین با ضلع های 120 و 120 ، 60
?	مثلث متساوی الاضلاع با ضلع 100
$\frac{100 \times 75}{2} =$	مثلث قائم الزاویه با ضلع های 125 و 100 ، 75
$\pi \left(\frac{150}{\pi}\right)^2 = \frac{22500}{\pi} \approx$	دایره با شعاع $\frac{150}{\pi}$

در محاسبه ی مساحت مثلث متساوی الساقین و متساوی الاضلاع با مشکل روبه رو شدیم. شکل هر دو را رسم کردیم.



رسم این دو شکل که تمام شد، میلاد گفت: فهمیدم! ما می توانیم از رابطه ی فیثاغورس استفاده کنیم و ...

مساحت مثلث متساوی الساقین و مساحت مثلث متساوی الاضلاع را محاسبه کردم. در این جا یاور گفت: من فکر می کنم مساحت شکل های دیگری را می توانیم حساب کنیم؛ برای مثال، دوزنقه ی قائم الزاویه و دوزنقه ی متساوی الساقین. من (محمود) گفتم: از کجا فهمیدی؟

یاور گفت: در یکی از امتحان های درس هندسه، سؤالی در مورد مساحت دوزنقه ی متساوی الساقین مطرح شده بود که من نتوانستم آن را حل کنم. بعد از امتحان که روش حل آن مسئله



را فهمیدم، خیلی افسوس خوردم. این خاطره که یادآوری آن همواره برایم تلخ است، فایده‌ای داشت و آن، این که برای همیشه روش محاسبه‌ی مساحت دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین را فهمیدم. الآن که میلاد مساحت مثلث‌های متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع را به کمک رابطه‌ی فیثاغورس به دست آورد، به یاد دوزنقه افتادم.

محمود: ما برای این که ضلع‌های دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه با محیط ۳۰۰ متر را تعیین کنیم، به زحمت افتادیم اما توانستیم آن‌ها را تعیین و مساحت‌ها را محاسبه کنیم.

مسئله‌ی ۷: به عنوان دست گرمی در کلاس، چگونه تعیین ضلع‌های دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه با محیط ثابت ۳۰۰ متر را بررسی کنید. آیا پاسخ یکناست؟ مساحت‌ها را در هر حالت حساب کنید.

محمود: برای انجام دادن محاسبات از ماشین حساب هم کمک گرفتیم؛ بنابراین، بعضی

از مساحت‌ها را تقریبی حساب کردیم. پس از این مرحله، جدول را کامل‌تر کردیم و به خواسته‌ی مسئله‌ی «روزگاران قدیم و محصور کردن مرتع‌ها» توجه کردیم. ما باید مشخص می‌کردیم که کدام شکل بیش‌ترین مساحت را دارد. خیلی زود نتایج زیر به‌دست آمد:

۱- در بین شکل‌های هندسی با محیط ثابت، دایره بیش‌ترین مساحت را دارد.

۲- در بین مثلث‌ها با محیط ثابت، مثلث متساوی‌الساقین بیش‌ترین مساحت را دارد.

۳- در بین چهارضلعی‌ها با محیط ثابت، مربع بیش‌ترین مساحت را دارد.

پس از آن‌که گزارش کار محمود پایان یافت، بحث و گفت‌وگو در مورد ضعف‌ها، قوت‌ها، زیبایی‌ها و ... به‌راه افتاد و سؤال‌های گوناگونی مطرح شد.



مسئله‌ها

۱. در مورد روند حل مسئله‌ی گروه محمود بحث کنید و نظرتان را در مورد روش کار این گروه بنویسید. روش کار این گروه را با روند حل مسئله‌ی ایمان و آرمان مقایسه کنید. کدام را می‌پسندید؟ چرا؟

۲. آیا حکم‌هایی که گروه محمود به‌دست آورد، همواره درست هستند؟ آیا آن‌ها را به‌عنوان قضیه یا حکم همیشه درست می‌توان پذیرفت؟

۳. آیا حکم‌های دیگری از راه‌حل‌های گروه محمود و گروه ایمان می‌توان حدس زد؟

۴. اگر پنج‌ضلعی‌ها را در نظر بگیریم، نتیجه چه خواهد شد؟ درباره‌ی شش‌ضلعی‌ها چه‌طور؟ درباره‌ی n ضلعی‌ها چه‌طور؟ حدس بزنید. اگر نتوانستید استدلال دقیق ارائه کنید سعی کنید تقریب بزنید.

۵. رابطه‌ای شبیه رابطه‌ی هرون در مورد چهارضلعی‌ها وجود دارد. اگر a و b و c و d

ضلع‌های چهارضلعی باشند و p نصف محیط باشد، آن‌گاه مساحت چهارضلعی (S) برابر است با:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

الف) چگونه می‌توانید درستی این قانون را آزمایش کنید؟

ب) آیا می‌توانید به کمک این قانون کار آرمان و ایمان را کامل کنید و قضیه‌ی زیر را نتیجه

بگیرید؟

در بین همه‌ی چهارضلعی‌هایی که محیط ثابت دارند، مربع بیش‌ترین مساحت را دارد.

۶. بررسی کنید در میان همه‌ی مثلث‌هایی که یک ضلع ثابت و مساحت یکسان دارند، کدام

مثلث کم‌ترین محیط را دارد.

۷. بررسی کنید در بین همه‌ی مثلث‌های با مساحت ثابت، کدام یک کم‌ترین محیط را دارد.

۸. بررسی کنید در میان همه‌ی چهارضلعی‌های با مساحت یکسان، کدام نوع از چهارضلعی‌ها

کم‌ترین محیط را دارد. در مورد پنج ضلعی‌ها و شش ضلعی‌ها چه حدسی می‌زنید؟

۹. فرض کنید شکل‌های هندسی را در نظر بگیریم که مساحت یکسان دارند. در مورد شکلی

که کم‌ترین محیط را داشته باشد، چه حدسی می‌زنید؟ اگر از زورآزمایی با این‌گونه مسئله‌ها لذت

می‌برید، پیشنهاد می‌کنیم در مورد تعمیم این ایده‌ها به فضای سه‌بعدی بیندیشید. می‌توانید قضیه‌هایی

را حدس بزنید؛ شاید هم بعضی از آن‌ها را اثبات کنید.

۱۰. تعدادی خط موازی و هم‌فاصله را روی صفحه در نظر بگیرید (برای مثال خط‌های

دفترتان). دو خط ناموازی که این خط‌های موازی را قطع کنند، رسم کنید (چهارضلعی‌های

دو زنگه‌ای شکل پدید می‌آیند). بررسی کنید که آیا در بین ۷ دوزنگه‌ی پدیدآمده، دوزنگه‌ای وجود دارد

که مساحت آن $\frac{1}{7}$ مجموع مساحت‌ها باشد. در مورد تعمیم‌های این مسئله بحث کنید.



۵-۲. همتای چندضلعی‌ها در فضا (کشف دوباره!)

چه چیزهایی در فرآیند کشف مفاهیم ریاضی نقش دارند؟ شاید نتوان پاسخ این پرسش را به‌طور کامل پیدا کرد اما می‌توان بعضی از عوامل مؤثر در کشف ریاضی را شناسایی کرد. چگونه؟ تاریخ پیدایش ریاضی و تجربه‌ی آنانی که موفق به کشف شده‌اند دو راه خوب برای یافتن پاسخ هستند. یکی از ریاضی‌دانان می‌گوید: «چه در مورد پدیده‌های ذهنی و چه در مورد پدیده‌های دنیای واقعی - که به‌وسیله حواس ما قابل درک هستند - سرچشمه‌های فراوانی در مشاهده وجود دارد.» در هنگام مشاهده شباهت‌ها را در نظر بگیرید. آن‌ها ممکن است شما را به کشف نتیجه‌های تازه هدایت کنند. مشاهده می‌تواند کمک کند تا حدس بزنیم و به تعمیم ایده‌ها نزدیک شویم. پس از حدس زدن نوبت آزمایش کردن در حالت‌های ساده است. گام بعدی جمع‌آوری و تنظیم اطلاعات به‌دست آمده از حالت‌های ساده و جزئی و با جستجوی الگو، حرکت به‌سوی یک نتیجه‌گیری کلی است. این روش را روش استقرایی یا تجربی نیز می‌گویند. با این فرآیند نتیجه‌ی کلی به‌دست آمده قطعی نیست و نیاز به



اثبات است.

در این جا لطیفه‌ای نقل می‌شود که بسیار آموزنده است :

گویند روزی ریاضی‌دانی! برای دریافت حقوق به بانک مراجعه کرد. تحویل دار بانک پس از دریافت برگه‌ی حقوق ریاضی‌دان، یک بسته اسکناس تحویل می‌دهد. ریاضی‌دان از تحویل‌دار می‌خواهد که پول را با دستگاه بشمارد. تحویل‌دار پاسخ می‌دهد که دستگاه خراب است، لطفاً همین‌جا خودتان دسته اسکناس را بشمرید. ریاضی‌دان بدون این‌که ناراحتی خود را آشکار کند شروع به شمارش می‌کند. حدود نیمی از پول‌ها را شمرده بود که گفت : تا این‌جا که درست است! پس بقیه‌اش هم درست است!! تحویل‌دار و مشتری‌ها ...

هنر و کارایی این فرآیند را در کشف دوباره‌ی! یک کشف ریاضی تجربه می‌کنیم. ریاضی‌دانی که این کشف از اوست از فرآیند کشف ریاضی به‌خوبی استفاده کرده است!

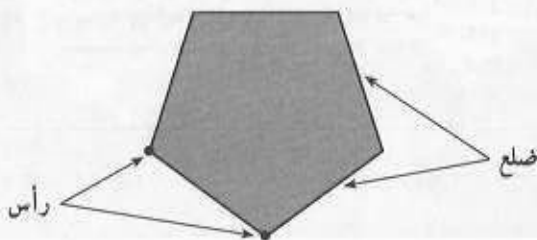
چندضلعی، یک شکل هندسی دو بُعدی است. فکر می کنید همزاد یا همتای آن در فضا چیست؟

پیش از این که ادامه ی بحث را بخوانید، با استفاده از اطلاعات قبلی روی این مسئله کار کنید تنظیم جدول را فراموش نکنید.

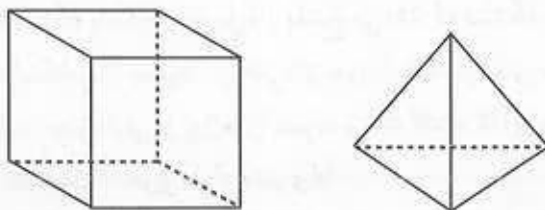
پس از طرح این مسئله در کلاس، دانش آموزان کار روی آن را شروع کردند. علی و آرش که معمولاً با هم درس می خوانند و دوستان صمیمی هستند، روش بهتری را نسبت به دانش آموزان دیگر در پیش گرفتند. مسیر تلاش فکری آن ها را بی می گیریم.

علی: پیش از این که به سراغ همانند و تعمیم چندضلعی ها به حالت سه بُعدی برویم، باید ویژگی های چندضلعی ها را بشناسیم و آن ها را مورد بررسی قرار دهیم.

آرش: بسیار خوب، یک چندضلعی دارای رأس و ضلع است. رأس ها در انتهای ضلع ها قرار دارند و هر دو رأس با یک ضلع به هم متصل می شوند؛ مثلاً پنج ضلعی نمونه ای از چندضلعی ها، است.

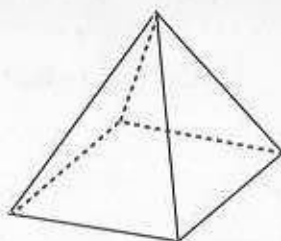
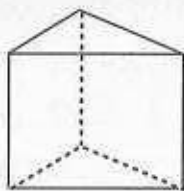


علی: یک ویژگی دیگر هم دارد؛ ناحیه ای در درون آن قرار دارد که کاملاً با ضلع ها احاطه شده است؛ بنابراین، مجموعه ی رأس ها و ضلع ها به هم متصل هستند و در صفحه یک ناحیه را به وجود می آورند. ما می توانیم از یک نقطه روی یک ضلع حرکت کنیم و با پیمودن یک مسیر، از روی ضلع ها به نقطه ای دیگر برویم و به همان نقطه برگردیم.



آرش: فکر می کنم ویژگی های چندضلعی ها را شناخته ایم ولی تعمیم آن ها در حالت سه بُعدی، چه می تواند باشد؟ من ناخودآگاه به یاد مکعب و هرم ها می افتم. شاید به دلیل این است که در کودکی

اسباب بازی هایی به این شکل ها داشته ام. بهتر است شکل آن ها را بررسی کنیم.
 علی: من علاوه بر این ها، به یاد منشور و اهرام مصری هم می افتم. اجازه بده آن ها را هم رسم کنیم.



آرش: احساس می کنم، در مسیر درستی قرار داریم اما پیشنهاد می کنم مثل چند ضلعی ها، ابتدا ویژگی های این شکل های سه بعدی را بررسی کنیم و مرتب یادداشت برداریم.
 علی: کاملاً موافقم؛ من از این شکل ها می فهمم که همه ی آن ها سه بعدی هستند و یک حجم را درست می کنند.

هر شکل، چند «رو» دارد؛ هر «رو»، سطحی صاف و به شکل یک چندضلعی است. هر شکل، چند «یال» و تعدادی رأس دارد. هر یال دو رأس را به هم وصل می کند.

آرش: منظورت از «یال» چیست؟ این کلمه برای من ناآشناست.

علی: یال همان ضلع است. فکر می کنم برای کلمه ی «رو» هم اسم دیگری باشد.

آرش: مطمئن هستید؟ اگر هردو یکی هستند، چرا هردو اسم را به کار می بریم؟

علی: فکر می کنم که در حالت سه بعدی، ضلع را یال می گویند ولی مطمئن نیستم.

آرش: خوب، می توانیم از معلم بپرسیم، البته اگر فرصت بود، می توانستیم با استفاده از کتابخانه درباره ی آن تحقیق کنیم!

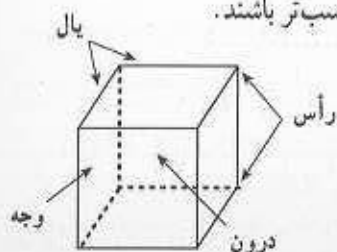
علی: اگر بخواهیم از کتابخانه استفاده کنیم، مسئله به این زودی حل نمی شود. بهتر است از

معلم بپرسیم. (او از معلم پرسید)

معلم: درست است، در حالت سه بعدی از نام «یال» استفاده می کنیم. حتی می توانیم در

چندضلعی ها نیز جای ضلع از کلمه ی «یال» استفاده کنیم. «رو» هم کلمه ی خوبی است ولی جای آن

کلمه ی «وجه» به کار می رود. شاید برای درس ما، این واژه ها مناسب تر باشند.



آرش: بهتر است یکی از این شکل ها را در نظر

بگیریم و نام گذاری ها را روی آن انجام دهیم، فکر می کنم

مکعب مستطیل راحت تر باشد.

علی: وقت آن است که جدولی (راهبرد تنظیم جدول)



تشکیل دهیم و ویژگی های چندضلعی ها و شکل های سه بعدی را مقایسه کنیم.

اجزا	
چندضلعی	شکل سه بعدی
— رأس ها که صفر بُعدی هستند ؛	— رأس ها که صفر بُعدی هستند ؛
— ضلع ها یا یال ها که یک بُعدی هستند ؛	— یال ها که یک بُعدی هستند ؛
— درون چندضلعی که ناحیه ای دوبعدی است.	— وجه ها یا «رو» ها که دوبعدی هستند ؛
	— درون شکل های سه بعدی که سه بعدی هستند.

آرش : قبلاً به «درون» شکل های سه بُعدی توجه نکرده بودیم ولی شما آن را هم اضافه کردید.
 علی : این هم از مزایای تنظیم جدول است. وقتی جدول را مرتب می کردم متوجه شدم در مورد چندضلعی ها یک ویژگی به نام «درون» داریم. این جا بود که در مورد شکل های سه بعدی این ویژگی را اضافه کردم.

آرش : بسیار خوب ؛ این جدول شباهت ها و تفاوت ها را در مورد اجزای چندضلعی ها و مشابه آن ها را در سه بعد نشان می دهد ولی فکر می کنم هنوز نمی توانیم برای تعمیم آن ها در حالت سه بعدی تعریفی به دست بدهیم.

علی: فکر می‌کنم باید ارتباط بین اجزا را در چندضلعی‌ها و شکل‌های سه‌بُعدی بررسی کنیم.
 آرش: پیشنهاد خوبی است. من برای انجام دادن این کار جدولی تنظیم می‌کنم. شما دقت کن که چیزی از قلم نیفتند.

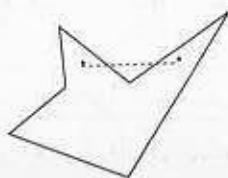
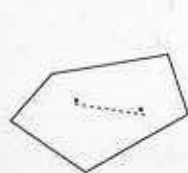
رابطه‌های بین اجزا	
چندضلعی	شکل سه‌بُعدی
— هر رأس دقیقاً متعلق به دو یال است.	— هر یال دقیقاً متعلق به دو «وجه» است.
:	:

مسئله: رابطه‌های بین اجزای چندضلعی‌ها و شکل‌های سه‌بُعدی را بیابید و جدول را کامل کنید.
 این مسئله را به صورت گروهی یا بحث همگانی حل کنید.
 شکل‌های سه‌بُعدی که به عنوان همانند، همزاد و مشابه چندضلعی‌ها مورد بررسی قرار گرفتند، «چندوجهی» (چندروی) نامیده می‌شوند. این نام‌گذاری نیز خیلی شبیه چندضلعی است. خوب است چند لحظه‌ای به این نام‌گذاری‌ها فکر کنید!
 به نظر می‌رسد که در نقطه‌ی شروع خوبی هستیم. البته هنوز به اندازه‌ی سر سوزن هم به پیش نرفته‌ایم ولی می‌توانیم دوردست را ببینیم. ما هنوز نمی‌دانیم که دقیقاً به دنبال چه چیزی هستیم!
 اکنون یک تعریف برای کار در دست داریم. اجازه بدهید با آن به کاوشگری بپردازیم. مسئله‌های زیر شاید فرصتی برای شما فراهم کنند تا در مورد چندوجهی‌ها تجربیاتی به دست آورید.



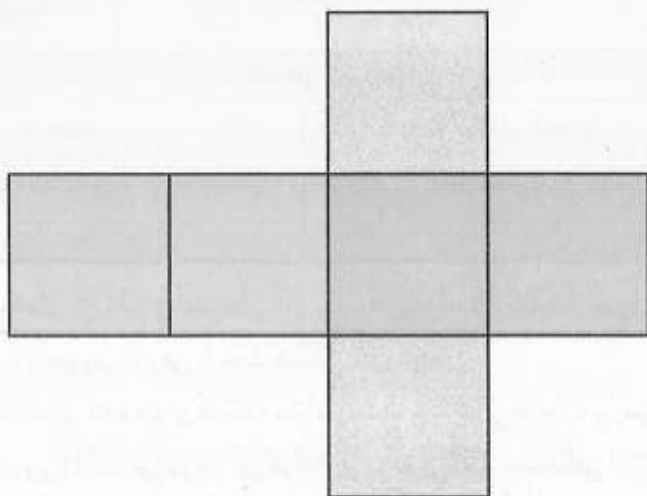
مسئله‌ها

۱. یک چندضلعی در صفحه کوژ (محدب) است. اگر پاره خطی که هر دو نقطه را در چندضلعی

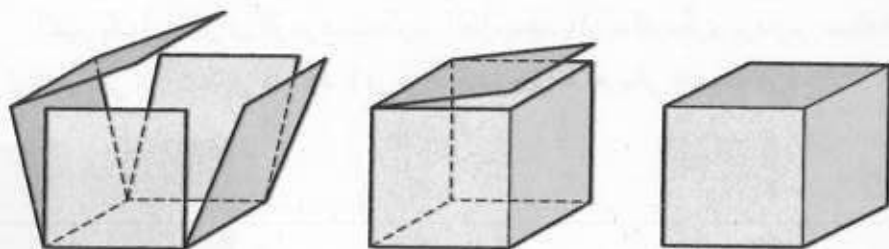


(= نقاط داخلی، روی یال‌ها، رئوس) به هم وصل می‌کند، خود نیز کاملاً درون چندضلعی باشد، آیا می‌توانید به یک چندوجهی کاو (مقعر) فکر کنید؟

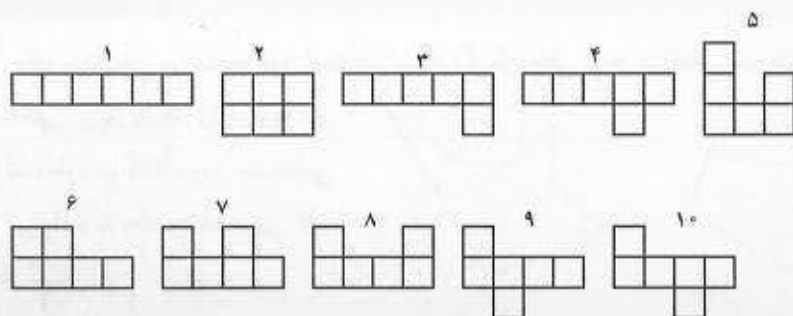
۲. مکعب یک چندوجهی آشناست که می‌توان آن را در راستای بال‌هایش گسترده و «الگوی خیاط» را برای آن پیاده کرد. در زیر، الگوی خیاط برای یک مکعب نشان داده شده است.

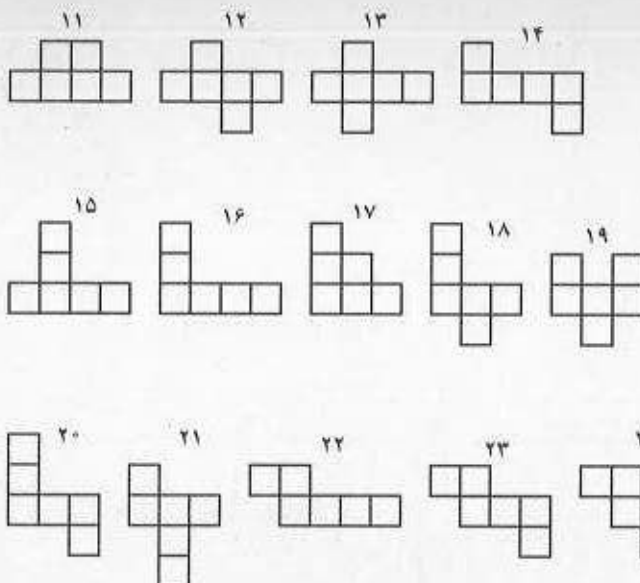


آن را ببرید و در امتداد خطوط پیوسته تا کنید. حالا آن چه را به دست آورده‌اید، طوری سرهم کنید که یک مکعب ساخته شود (از چسب نواری هم می‌توانید استفاده کنید).

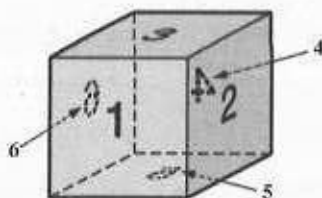


۳. متوجه شدید که «الگوی خیاط» برای یک مکعب از ۶ مربع تشکیل شده است. کدام یک از وضعیت‌های مسطح زیر، الگوهایی برای یک مکعب هستند؟

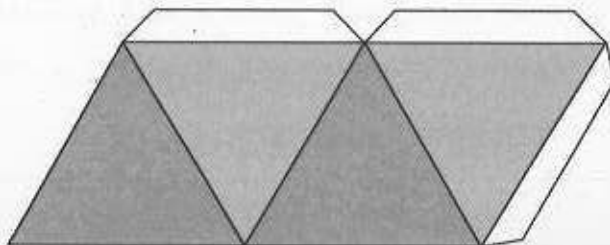




۴. سطوح یک مکعب در تصویر زیر از ۱ تا ۶ شماره گذاری شده اند. ۶ تا از الگوهای خیاط مسئله ی قبل را که یک مکعب از آن ها ساخته می شود، انتخاب کنید. مربع ها را از ۱ تا ۶ طوری شماره گذاری کنید که اگر مکعب جمع شود، شماره ها مانند شکل زیر قرار گیرند. (نمره ی اضافه به فردی داده می شود که بتواند عددها را طوری قرار دهد که جهت هایشان نیز با جهت عددهای شکل، یکی باشند.)



۵. این الگوی خیاط برای هرمی مثلثی است که هریک از وجه های آن یک مثلث متساوی الاضلاع است. این را ببرید و تا کنید تا یک چندوجهی درست شود.





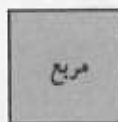
۵-۳- نقش مشابَهت‌ها در پیدایش مفاهیم ریاضی

هنگامی که مشغول بررسی مسئله یا در جست‌وجو و کاوش برای کشف ویژگی‌های اشیا هستیم و نمی‌توانیم به پیش برویم، باید به وضعیت یا حالت ساده‌تری که می‌شناسیم، بازگردیم و سعی کنیم از میان حالت‌های ساده، الگو یا نشانه‌ای برای ادامه‌ی کار پیدا کنیم.

علی: ما به دنبال همانند و تعمیم سه‌بعدی برای چندضلعی‌ها هستیم و نمی‌دانیم که آن‌ها دقیقاً چه هستند. تا این جا تلاشمان خوب بوده است ولی ادامه‌ی تحقیق و کاوش معلوم نیست! آرش: در راهبردهای حل مسئله دیدیم که بررسی حالت‌های ساده‌تر و الگویابی با استفاده از آن‌ها خیلی مؤثر است. اگر موافقید، شروع کنیم.

علی: البته، به نظر من بهتر است این کار را از چندضلعی‌های ساده و خاص شروع کنیم و در فضا به دنبال همانند و تعمیمی برای آن‌ها باشیم. در قسمت قبلی نیز این کار را کردیم.

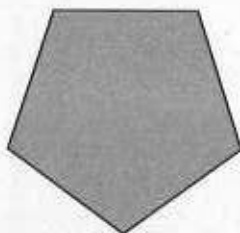
آرش: بسیار خوب، سه‌ضلعی‌ها ساده‌ترین چندضلعی هستند و بعد از آن‌ها چهارضلعی‌ها. در بین مثلث‌ها، از همه بیش‌تر، با مثلث قائم‌الزاویه راحت هستیم و در بین چهارضلعی‌ها، با مربع.



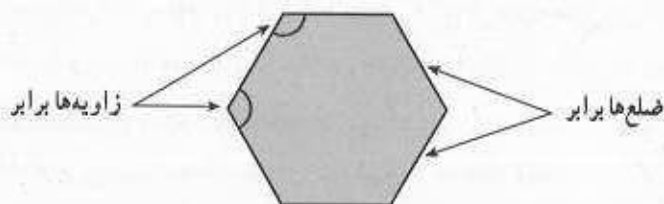
علی: قبول داریم که مربع ساده‌ترین چهارضلعی است؛ چون از هر طرف به آن نگاه کنیم به یک شکل است. ولی معتقدم مثلث متساوی الاضلاع ساده‌ترین مثلث است؛ چون آن را هم از هر گوشه که نگاه کنیم، یک‌سان است.



آرش: نظرت را قبول داریم. جالب این جاست که در مربع، ضلع‌ها برابر و زاویه‌ها هم برابرند. در مثلث متساوی الاضلاع هم همین‌طور است ما می‌توانیم در پنج‌ضلعی‌ها نیز شکلی را که ضلع‌ها و زاویه‌هایش برابرند، در نظر بگیریم.



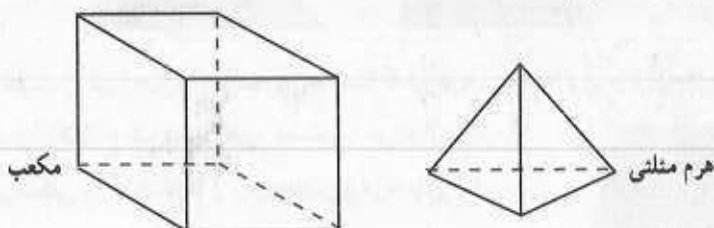
علی: لانه‌های زنبور هم به‌صورت شش‌ضلعی منتظم است. یادم آمد «به چندضلعی‌هایی که ضلع‌ها و زاویه‌هایشان برابرند، چندضلعی منتظم می‌گویند».



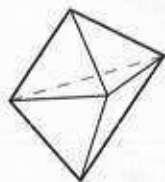
آرش: بهتر است چندضلعی‌های منتظم را در نظر بگیریم و همتایی سه‌بعدی آن‌ها را پیدا کنیم. علی: اگر یک شکل سه‌بعدی (یک چندوجهی) بخواند همتای چندضلعی منتظم باشد، باید همه‌ی وجه‌هایش مانند هم و همه‌ی یال‌هایش برابر باشند. زاویه‌های روی هر وجه هم برابر باشند؛ یعنی هر وجه آن یک چندضلعی منتظم باشد. به‌طور خلاصه، از هر طرف که نگاه کنیم، یک‌سان به نظر آید. آرش: بنابراین، نتیجه می‌گیریم هر چندوجهی که همه‌ی وجه‌هایش یک چندضلعی منتظم باشد، یک چندوجهی منتظم است.

علی: نتیجه‌گیری شجاعانه‌ای است ولی من نگران این هستم که نکند در نتیجه‌گیری به‌قدر لازم دقت نکرده باشیم. با این حال، دلیل مشخصی ندارم. پیش برویم شاید مشکلی پیش نیاید. آرش: امیدوارم که به تناقضی نرسیم.

علی: آیا هر چندوجهی می تواند یک چندوجهی منتظم باشد؟
 آرش: در مورد چندضلعی ها که این طور نیست؛ چون همه ی چندضلعی ها منتظم نیستند؛
 متوازی الاضلاع، دوزنقه، لوزی و مستطیل همگی چهارضلعی هستند ولی منتظم نیستند. حدس من
 این است که چندوجهی ها هم همگی منتظم نیستند.
 علی: من هم با شما موافقم ولی این فقط یک حدس است. بیا تا دو چندوجهی منتظم را که
 می شناسیم، در نظر بگیریم.



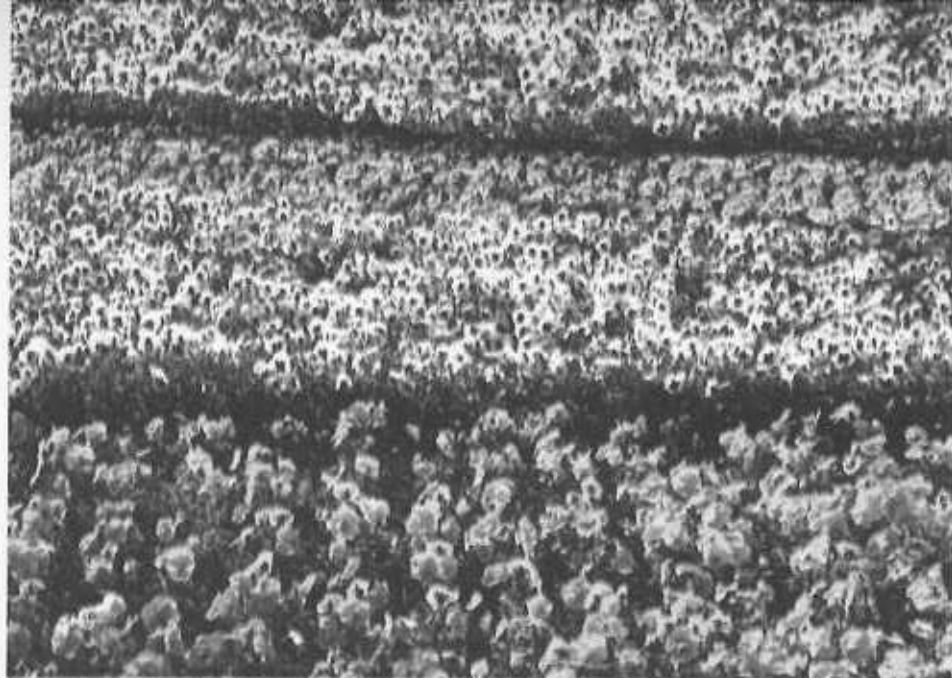
آرش: هر وجه مکعب، مربع است و هر وجه هرم مثلثی، یک مثلث متساوی الاضلاع است.
 اگر چندضلعی منتظم هر وجه را با n ضلعی منتظم نشان دهید، آن گاه در مورد دو شکل بالا یک کمیت
 مهم داریم و آن برای مکعب، $n = 4$ و برای هرم مثلثی، $n = 3$ است.
 علی: یاد می آید که در کودکی با اسباب بازی هایی با شکل های فضایی، زیاد بازی می کردم.
 بعضی وقت ها، دو تا هرم را به هم می چسباندم. بهتر است این طور سؤال کنم که آیا برای $n = 3$ و
 $n = 4$ چندوجهی های دیگری هم وجود دارند؟



آرش: اتفاقاً می توانیم از همان تجربه ی کودکی شما استفاده کنیم.
 همه ی وجه ها مثلث متساوی الاضلاع هستند ولی کمی غیرعادی است.
 علی: باید بیش تر دقت کنیم.

مسئله ی ۱: معیار ما برای این که یک چندوجهی منتظم باشد، این است که از هر سمت نگاه
 کنیم یک سان باشد؛ به عبارت دیگر، همه ی رأس ها و همه ی وجه ها و یال ها و زاویه ها باید یک سان
 باشند. شکل بالا را به دقت مورد بررسی قرار دهید و سپس، تعریفی دقیق برای چندوجهی منتظم ارائه
 کنید.

مسئله ی ۲: به طور طبیعی، منظور از چندضلعی منتظم، چندضلعی ای است که کوژ نیز باشد.
 آیا یک چندوجهی که همه ی شرط های مسئله ی ۱ را داشته باشد، می تواند کوژ نباشد؟ (تورفتگی
 داشته باشد؟)



مسئله ۳: اگر فرض کنیم که یک چندوجهی دارای خاصیت‌های زیر است:

— همه‌ی وجه‌ها هم‌نهشت‌اند؛

— همه‌ی رأس‌ها یک‌سان دیده می‌شوند؛

اما همه‌ی یال‌ها برابر نیستند. آیا این چندوجهی می‌تواند وجود داشته باشد؟

مسئله ۴: در مسئله‌ای آمده است که در یک چندوجهی، وجه‌ها هم‌نهشت و یال‌ها مساوی هستند و رأس‌ها یک‌سان دیده می‌شوند اما وجه‌ها چندضلعی منتظم نیستند. به نظر شما، آیا چنین چندوجهی‌ای می‌تواند وجود داشته باشد؟

دسته‌بندی چندوجهی‌های منتظم

دسته‌بندی اشیا براساس ویژگی‌های آن‌ها بخشی از روش علمی در مطالعه و تحقیق است. این کار کمک می‌کند تا تعداد بیش‌تری از ویژگی‌های یک شیء کشف شود. اکنون تلاش می‌کنیم تا ادامه‌ی مطالعه و تحقیق را با دسته‌بندی کردن چندوجهی‌های منتظم، آسان‌تر کنیم.

چگونه می‌توان چندوجهی‌های منتظم را دسته‌بندی کرد؟

پیش از ادامه‌ی مطالعه، روی این سؤال فکر کنید و از نظریاتتان یادداشت بردارید. می‌توانید به صورت گروهی کار کنید. البته در نگاه اول، این، یک مسئله‌ی ریاضی به نظر نمی‌رسد.

دانش‌آموزان کلاس روی این سؤال که در مسیر هدف اصلی، — یعنی یافتن همانند و تعمیم سه‌بعدی چندضلعی‌ها — بود، کار کردند، آرش و علی نیز با تلاش زیاد، در مسیر حل این مسئله پیش رفتند. خلاصه‌ای از تلاش این دو را که نشانگر مسیر فکری آنان است، بررسی می‌کنیم.



۳ ضلعی منتظم



۴ ضلعی منتظم



۵ ضلعی منتظم



۶ ضلعی منتظم

...

آرش: روش بررسی حالت‌های ساده‌تر و خاص، تاکنون به ما کمک زیادی کرده است. اگر موافقید، شروع کنیم.

علی: بسیار خوب، از چندضلعی‌ها شروع می‌کنیم و بعد به حالت سه بُعدی - یعنی چندوجهی‌ها - می‌رویم. دسته‌بندی چندضلعی‌های منتظم، کار ساده‌ای است. برای هر عدد طبیعی n که بزرگ‌تر از ۲ باشد، یک n ضلعی منتظم داریم.



هرم مثلثی



مکعب

آرش: برای چندضلعی‌های منتظم، یک عدد n - که تعداد ضلع‌ها را نشان می‌دهد - دسته‌بندی را مشخص می‌کند ولی فکر می‌کنم دسته‌بندی چندوجهی‌های منتظم به این راحتی نباشد. بهتر است

هر مثلثی (چهاروجهی منتظم) و مکعب را که دو چندوجهی منتظم هستند، بررسی کنیم.

در هرم مثلثی، هر وجه سه ضلع دارد و در هر رأس یا کُنج، سه وجه با هم تلاقی دارند. در مورد مکعب هر وجه ۴ یال دارد و هر کُنج (رأس) از سه وجه به وجود می‌آید.

علی: در تعریف چندوجهی‌ها دو نکته‌ی مهم وجود دارد: اول، تعداد یال‌های هر وجه و دوم، تعداد وجه‌هایی که در هر رأس با هم تلاقی دارند. اگر چندوجهی‌های منتظم را در نظر بگیریم، «وجه‌ها چندضلعی‌های منتظم هم نهشت» هستند و «رأس‌ها یک‌سان دیده می‌شوند».

آرش: چه خوب! دسته‌بندی چندضلعی‌های منتظم با یک عدد n انجام می‌شود. کافی است یک عدد طبیعی دیگر را که مربوط به رأس‌ها باشد در نظر بگیریم؛ مثلاً تعداد وجه‌هایی را که در هر رأس با هم تلاقی دارند و یک کُنج می‌سازند، با m نشان دهیم. در این صورت، زوج (m, n) می‌تواند ویژگی‌های یک چندوجهی منتظم را بیان کند.

علی: جالب است؛ ما در مورد دسته‌بندی چندضلعی‌های منتظم، فقط یک کمیت n داشتیم و می‌دانستیم که برای هر $n \geq 3$ دقیقاً یک n ضلعی منتظم وجود دارد ولی، آیا برای هر زوج (m, n) هم دقیقاً یک چندوجهی منتظم وجود دارد؟ به عنوان مثال، یک چندوجهی منتظم که هر وجه آن ۱۱ ضلعی منتظم باشد در هر رأس (کُنج)، ۷ وجه با هم تلاقی کنند، وجود دارد؟ آرش: نمی‌دانم. باید کمی فکر کنم. پس سؤال اصلی این است:

«به ازای کدام n و m طبیعی یک چندوجهی منتظم وجود دارد؟» البته می‌دانیم که $n \geq 3$ و $m \geq 3$ (چرا؟)

علی: چون هر وجه یک چندضلعی است و کوچک‌ترین چندضلعی، مثلث است، پس $n \geq 3$ و هر کُنج (رأس) چندوجهی حداقل با سه وجه پدید می‌آید $m \geq 3$. در واقع، با دو وجه، یک خط پدید می‌آید نه یک نقطه؛ اما برای پاسخ‌گویی به سؤال اصلی، فکر می‌کنم باید به چندضلعی‌های منتظم برگردیم.

آرش: به نظر من، بهتر است نمونه‌ای از این چندوجهی‌های منتظم را بسازیم؛ یعنی با قیچی و مقوا و چسب یک کاردستی درست کنیم، سپس خوب به آن نگاه کنیم. حتی در مرحله‌ی ساختن دقت کنیم که چه مشکلاتی پیش می‌آید و از آن‌ها ایده بگیریم.

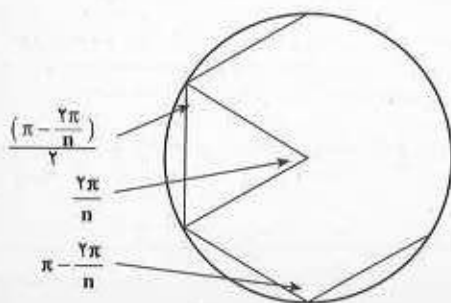
علی: فکر بسیار خوبی است.

کاردستی: یک چندوجهی منتظم بسازید. از هیچ کس راهنمایی نگیرید و سعی کنید این کار را به شیوه‌ی آزمایش و خطا انجام دهید. پس از ساخته شدن یک چندوجهی منتظم، خوب به آن نگاه کنید و مسئله‌ی مطرح شده را در نظر آورید. بحث همگانی لازم است. این قسمت مسئله یک گذرگاه است تا امید نشود.

برای راحتی کار، هر وجه را یک مثلث متساوی‌الاضلاع بگیرد ($n = 3$) و امکان‌های مختلف m را آزمایش کنید.

علی: نکته‌ی اصلی این است که در یک کُنج (رأس) چند مثلث متساوی‌الاضلاع جا می‌گیرد. به یاد یک مسئله‌ی مشابه افتادم. موقعی که می‌خواستیم یک سطحی را با چندضلعی‌های منتظم کاشی‌کاری کنیم، متوجه شدیم، برای این که در هر رأس کاشی‌ها دقیقاً به هم جفت شوند و فضای خالی بین آن‌ها باقی نماند، بایستی در هر رأس؛ مجموع زاویه‌ها 2π (360°) شود؛ یعنی روی یک سطح صاف در هر رأس، جمع زاویه‌ها باید 360° درجه باشد.

آرش: فهمیدم، در هر رأس یک زاویه از یک وجه وجود دارد. کافی است اندازه‌ی هر زاویه‌ی چندضلعی منتظم را بدانیم. چون جمع این زاویه‌ها در هر رأس 360° درجه است، تعداد وجه‌ها در هر رأس (m) معلوم می‌شود. به شکل روبه‌رو نگاه کن.





به عبارت دیگر، $m(\pi - \frac{2\pi}{n}) = 2\pi$ و اگر π را از طرفین ساده کنیم، داریم:

$$m(1 - \frac{2}{n}) = 2$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

(۱)

و یا

مسئله ۱: الف — محاسبه‌ها را به طور کامل انجام دهید و نشان دهید دو رابطه معادل هستند.

ب — همه‌ی جواب‌های معادله‌ی (۱) را پیدا کنید (حدس و آزمایش)

علی: این وضعیت در مورد چندضلعی‌ها و روی صفحه، دو بُعدی است. روشن است که در مورد چندوجهی‌ها و در فضای سه بُعدی، وضعیت فرق می‌کند. ما نمی‌خواهیم چندضلعی‌های منتظم را روی صفحه در هر رأس کنار هم بچینیم. اگر چندوجهی محدب باشد (تو رفتگی نداشته باشد)، واضح است که جمع زاویه‌ها در یک کُنج (رأس) کم‌تر از 360° درجه است؛ یعنی:

$$m(\pi - \frac{2\pi}{n}) < 2\pi$$

$$m(1 - \frac{2}{n}) < 2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

(۲)

(محاسبه‌ها را انجام دهید و نشان دهید که رابطه‌ی دوم از رابطه‌ی اول به دست می‌آید.)
 آرش: معادله‌ی $\frac{1}{p} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ ، چند تا جواب بیش‌تر ندارد ولی نابرابری $\frac{1}{p} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ ممکن است بی‌نهایت جواب داشته باشد؛ یعنی، بی‌نهایت زوج (m, n) .
 علی: ترس ندارد. بگذار آزمایشی بکنیم، شما هم کمک کن. می‌دانیم که $m \geq 3$ پس $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \quad (\text{چرا؟})، \text{ بنابراین،}$$

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{n}$$

$$n \leq 6$$

از طرف دیگر، می‌دانیم $n \geq 3$ است؛ بنابراین:

$$3 \leq n \leq 6 \quad (3)$$

آرش: عجب نکته‌ی قشنگی! نقش n و m در نابرابری (۲) یک‌سان است؛ یعنی همه‌ی شرایط هر دو یکی است. بنابراین:

$$3 \leq m \leq 6 \quad (4)$$

مسئله‌ی ۲: نظر آرش را در مورد « m و n » بررسی کنید. سپس جدولی از زوج‌های « m و n » براساس نابرابری‌های (۳) و (۴) تشکیل دهید.

$$(3 \text{ و } 3)$$

$$(3 \text{ و } 4)$$

$$(3 \text{ و } 5)$$

$$(4 \text{ و } 3)$$

$$(4 \text{ و } 4)$$

$$(4 \text{ و } 5)$$

$$(5 \text{ و } 3)$$

$$(5 \text{ و } 4)$$

$$(5 \text{ و } 5)$$

علی: واقعاً غیر عادی است. فکر می‌کردیم بی‌نهایت جواب دارد ولی دقیقاً نه تا جواب (۹) تا زوج مرتب « m و n » داشت!
 آرش: خوب است هر نه تا جواب را در نابرابری قرار دهیم و آزمایش کنیم. هنوز خیال می‌کنم چشم‌بندی است!

مسئله‌ی ۳: هر نه جواب را در نابرابری (۲) آزمایش کنید. اعداد دیگری غیر از جواب‌ها را

نیز بیازمایید.

اگر چه نه جواب برای زوج « m و n » به دست آمد، ولی مطمئن نیستیم که برای هر زوج یک چندوجهی منتظم وجود دارد. شرط این که حاصل جمع زاویه‌های وجه‌ها در هر کُنْج (رأس) کم‌تر از 2π باشد بسیار مهم است؛ زیرا در غیر این صورت، چندوجهی به وجود نمی‌آید.

مسئله‌ی ۴: نشان دهید فقط در حالت‌های زیر چندوجهی منتظم وجود دارد.

m	۳	۳	۳	۴	۵
n	۳	۴	۵	۳	۳

از حل این مسئله چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

این چندوجهی‌های منتظم به اجسام افلاطونی معروف‌اند. در پایان این بخش، نکات تاریخی را یادآور می‌شویم.

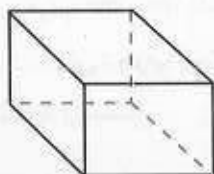
ویژگی مهم چندوجهی‌ها

تاکنون به بررسی و مطالعه‌ی ویژگی‌های دسته‌ی خاصی از چندوجهی‌ها - یعنی چندوجهی‌های منتظم - پرداختیم و موفق شدیم همه‌ی چندوجهی‌های منتظم را شناسایی کنیم. اکنون در صدد شناخت ویژگی‌های همه‌ی چندوجهی‌ها هستیم.

دیدگاهمان را عوض می‌کنیم و بار دیگر به چندضلعی‌ها باز می‌گردیم. چندضلعی‌ها بر اساس تعداد ضلع‌ها دسته‌بندی می‌شوند. وقتی یک چندضلعی در دست است با شمارش تعداد اضلاع آن، مشخص می‌شود که در کدام دسته قرار می‌گیرد. روش دیگر، دسته‌بندی چندضلعی‌ها بر اساس تعداد رأس‌هاست. با این حال، چون در مورد چندضلعی‌ها تعداد ضلع‌ها و رأس‌ها برابر است، بنابراین، هر دو روش یکی است.

در مورد چندوجهی‌ها سؤال مهم این است:

برای تعیین دسته‌بندی یک چندوجهی، چه چیزهایی مهم است؟ شمارش یال‌ها یا شمارش رأس‌ها و یا ...؟



مکعب

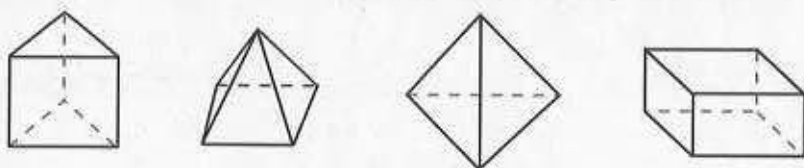
روی این سؤال کار کنید. حالت‌های ساده و خاص را در نظر بگیرید. علی و آرش روی این مسئله کار کرده‌اند. بحث آن‌ها را بی‌می‌گیریم؛ علی: با مکعب شروع می‌کنیم. مانند چندضلعی‌ها، تعداد یال‌ها را می‌شماریم؛ درست است ۱۲ یال دارد. تعداد رأس‌ها را هم شمارش می‌کنیم، ۸ رأس دارد.

آرش: تعداد رأس‌ها و یال‌ها برابر نیست و با چندضلعی‌ها تفاوت دارد. چندوجهی‌ها یک جزء دیگر هم دارند: وجه‌ها. آن‌ها را هم می‌شمریم. در مکعب ۶ وجه وجود دارد.

علی: اگر چندوجهی‌ها را براساس یال‌ها، رأس‌ها و وجه‌ها دسته‌بندی کنیم، آن‌گاه باید یک سه تایی از اعداد را در نظر بگیریم. (۶، ۸، ۱۲) همان مکعب است.

آرش: خیلی جالب است! آیا در مورد این عددها چیز دیگری می‌توان گفت؟ آزمایش بدی نیست: یک جدول تنظیم می‌کنیم و تعدادی از چندوجهی‌ها را با این روش مورد بررسی قرار می‌دهیم: یعنی یال‌ها، رأس‌ها و وجه‌های آن‌ها را می‌شمریم.

علی: یال‌ها را با E، رأس‌ها را با V و وجه‌ها را با F نام‌گذاری می‌کنیم. مکعب، چهاروجهی منتظم، هرم مصری، منشور مثلثی و ... علی و آرش چندوجهی‌های دیگری را هم در نظر گرفتند و موفق به کشف یک قانون کلی در مورد چندوجهی‌ها شدند.



F	V	E	چندوجهی
۶	۸	۱۲	مکعب
			هرم مثلثی
			هرم مصری
			منشور مثلثی

مسئله ۵: جدول بالا را کامل کرده الگویی در بین آن‌ها جست‌وجو کنید.

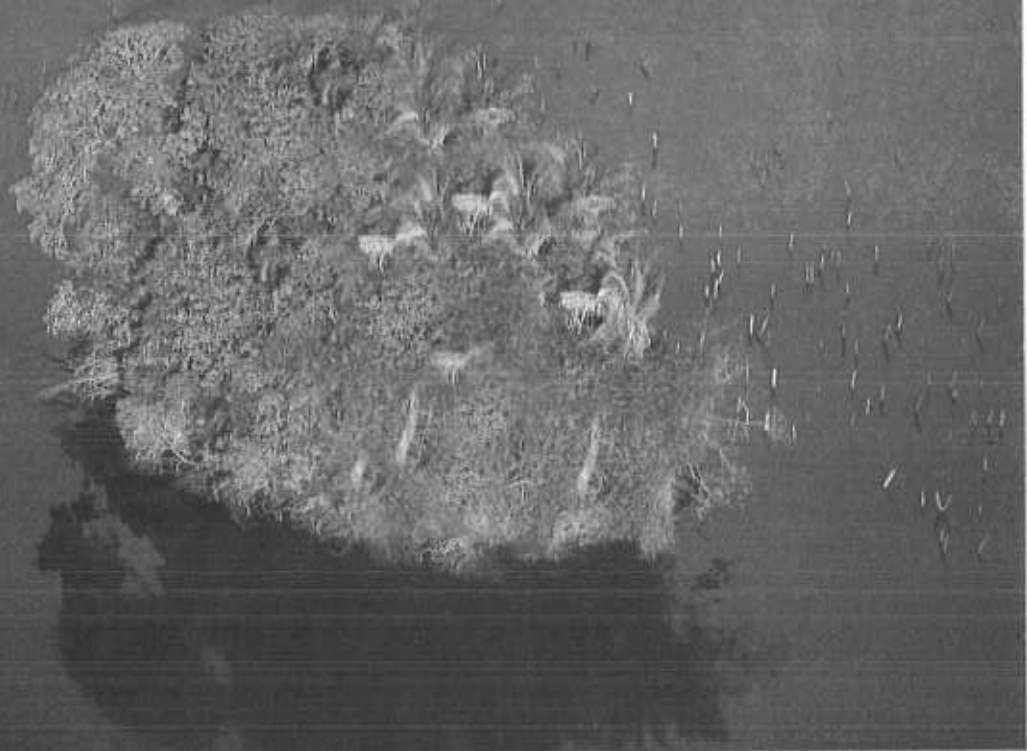
اگر به حدس خوبی نرسیدید، مثال‌های دیگری از چندوجهی‌هایی که می‌شناسید به جدول اضافه کنید. حالا دوباره تلاش کنید.

اگر موفق به کشف قانونی در مورد چندوجهی‌ها نشدید، ابتدا مسئله‌های زیر را حل کنید و سپس برای یافتن الگویی در جدول تلاش کنید.

۱- چندضلعی‌ها در صفحه، مشابه چندوجهی‌ها در فضا هستند. یک چندضلعی در صفحه دارای E یال (ضلع) و V رأس است. چه رابطه‌ای بین E و V وجود دارد؟

۲- E و V و F را برای چندوجهی‌های دیگر محاسبه کنید. آن‌ها را نیز به جدول اضافه کنید.

برای مثال، هرم دوگانه (دو هرم مثلثی به هم چسبیده) و چندوجهی‌هایی که در این بخش شناخته‌ایم.



می‌توان تعداد بی‌شماری چندوجهی را در نظر گرفت.

روی جدول کار کنید و بین E و V و F رابطه‌ای پیدا کنید.

دسته‌بندی چند وجهی‌های منتظم به کمک رابطه‌ی اولر

پس از وقفه‌ای که به دلیل بررسی ویژگی‌های چندوجهی‌ها و کشف دوباره‌ی رابطه‌ی «اولر»

ایجاد شد، به بررسی عمیق‌تر چندوجهی‌های منتظم باز می‌گردیم. به هر چندوجهی منتظم، یک زوج

m و n منسوب کردیم: n نوع چندضلعی (n ضلعی) هر وجه و m تعداد وجه‌هایی را که در یک کُنج

(رأس) با هم تلاقی دارند، نشان می‌دهد. جدول زیر که امکان‌های مختلف m و n را مشخص می‌کند،

به دست آمده است. می‌دانیم که زوج (۳ و ۳) یک چهاروجهی منتظم (هرم مثلثی) و (۳ و ۴) یک

مکعب را مشخص می‌کنند. آیا چندوجهی‌های منتظم برای سه امکان دیگر، یعنی (۴ و ۳)، (۵ و ۳)

و (۵ و ۳)، وجود دارد؟ آیا می‌توان بیش از یک چندوجهی منتظم به هر زوج نسبت داد؟ در واقع،

پاسخ این دو سؤال، شناسایی چندوجهی‌های منتظم را تکمیل می‌کند.

n	۳	۳	۳	۴	۵
m	۳	۴	۵	۳	۳

پیش از این که ادامه‌ی بحث را از زبان علی و آرش بشنوید روی این سؤال‌ها کار کنید.

علی: یک چندوجهی منتظم از نوع m و n را در نظر می‌گیریم. می‌خواهم یال‌ها را بشمارم. هر وجه یک n ضلعی منتظم است؛ بنابراین، هر وجه n یال دارد. پس تعداد کل یال‌ها برابر $n \times F$ است (F تعداد وجه‌هاست). در این صورت، هر یال دوبار شمرده می‌شود؛ زیرا هر یال مربوط به دو وجه است؛ بنابراین،

$$n \times F = 2 \times E$$

آرش: یک روش دیگر هم برای شمارش یال‌ها وجود دارد. در هر رأس (کُنج) m وجه با هم برخورد دارند؛ بنابراین، همه‌ی یال‌ها برای همه‌ی رأس‌ها برابر $m \times V$ است. (چرا؟) در این روش هم هر یال دوبار شمرده می‌شود. بنابراین:

$$mV = 2E$$

علی: اگر این دو معادله را بر حسب E حل کنیم، داریم:

$$(*) \quad E = E, \quad V = \frac{2E}{m} \quad \text{و} \quad F = \frac{2E}{n}$$

بنابراین، براساس رابطه‌ی اولر می‌توان نوشت:

$$2 = V - E + F$$

$$= \left(\frac{2E}{m} \right) - E + \left(\frac{2E}{n} \right) = \left(\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} \right) \times E$$

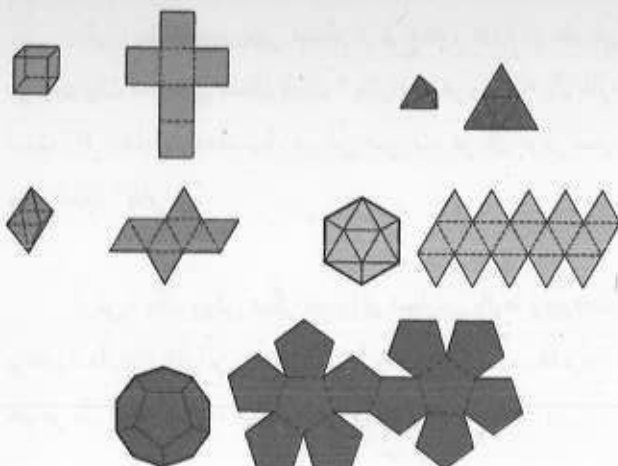
در نتیجه:

$$(**) \quad E = \frac{2}{\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n}}$$

آرش: این رابطه می‌گوید که تعداد یال‌ها دقیقاً براساس m و n مشخص می‌شوند. چون n و m را قبلاً شناخته‌ایم و معلوم هستند (جدول قبلی)، پس E و F و V به طور یکتا تعیین می‌شوند؛ یعنی به ازای هر n و m دقیقاً یک E و یک F و یک V به دست می‌آید. علی و آرش جدول زیر را کامل کردند.

n	m	E	V	F
۳	۳	۶	۴	۴
۳	۴			
۳	۵			
۴	۳			
۵	۳			

جدول را براساس رابطه‌ی $(*)$ و $(**)$ کامل کنید.



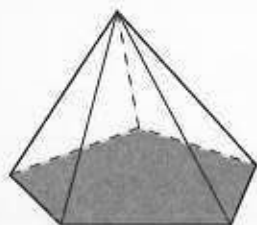
در شکل‌های رویرو
چندوجهی‌ها و گسترده‌ی آن‌ها
را که مربوط به جدول صفحه‌ی
قبل است، مشاهده می‌کنید.



مسئله‌ها

۱. از جمله چندوجهی‌هایی که به آسانی توصیف می‌شوند، هرم‌هایی با قاعده‌ی چندوجهی منتظم هستند. شما با هرمی که قاعده‌ی آن مثلث متساوی‌الاضلاع یا مربع است، آشنا هستید (یک هرم مصری). برای هر $n > 2$ ، یک هرم وجود دارد که قاعده‌ی آن، یک n ضلعی منتظم است. این یک چندوجهی با $n+1$ وجه - که یکی از آن‌ها یک n ضلعی منتظم (قاعده‌ی هرم) است - می‌باشد. n وجه دیگر آن مثلث‌هایی هستند که روی هر یک از n ضلع ساخته شده‌اند.

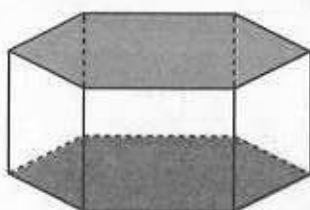
n مثلث با یکدیگر در یک نقطه (رأس هرم) تلاقی می‌کنند. در شکل، هرمی که قاعده‌ی آن در زیر یک پنج‌ضلعی منتظم است، نشان داده شده است.



یک الگوی خیاط دقیق برای این شکل رسم کنید. از آن یک رونوشت (کپی) بگیرید و آن را به شکل یک چندوجهی جمع کنید.

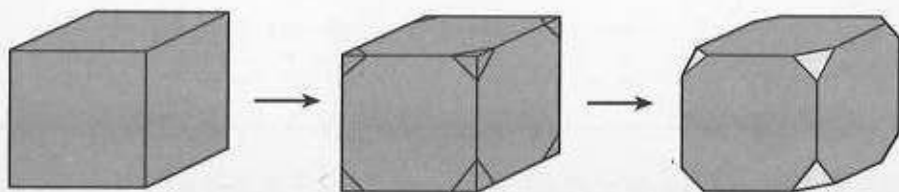
۲. دسته‌ی دیگری از چندوجهی‌ها که به آسانی توصیف می‌شوند، منشورهای هستند، که قاعده‌ی آن‌ها به شکل چندضلعی‌های منتظم مختلف است. مکعب یک منشور ممکن است قاعده‌ی مربع داشته باشد و قاعده‌ی یک منشور مثلثی ممکن است یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد. برای هر $n > 2$ ، یک منشور وجود دارد که قاعده‌ی

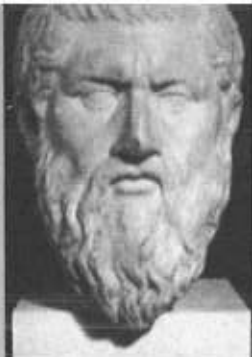
آن، یک هشت ضلعی است. این یک چندوجهی شامل دو چندضلعی موازی («بالا» و «پایین») است که توسط مستطیل‌ها به هم اتصال داده شده‌اند (n تا از آن‌ها) در شکل زیر، منشوری که قاعده‌ی آن، یک شش ضلعی منتظم و سطوح جانبی آن مربع هستند، نشان داده شده است. یک الگوی خیاط دقیق برای این شکل رسم کنید، یک رونوشت از آن بگیرید و آن را جمع کنید.



۳. ما چندضلعی‌ها را به‌طور خام، با توجه به تعداد یال‌هایشان، دسته‌بندی می‌کنیم. مثلث، یک چندضلعی با سه یال است و چهارضلعی، چندضلعی‌ای است که چهار یال دارد و یک n ضلعی، چندضلعی‌ای با n یال است. یکی از راه‌های دسته‌بندی چندوجهی‌ها، شمارش تعداد وجوه آن‌هاست؛ برای مثال، یک مکعب مربع، شش وجه دارد و گاهی نیز شش وجهی خوانده می‌شود. یک هرم مصری، پنج وجه دارد؛ پس، می‌توان آن را پنج وجهی خواند. می‌دانیم برای هر $n > 2$ ، یک چندضلعی با n ضلع وجود دارد؛ یک n ضلعی. آیا چیزی به‌عنوان هفت وجهی وجود دارد؟ یعنی، یک چندوجهی که دقیقاً هفت وجه داشته باشد؟ برای کدام n ، یک n وجهی وجود دارد؟

۴. اگر یک چندوجهی در اختیار داشته باشیم، با بریدن گوشه‌ای از آن — که یک رأس در آن واقع است — می‌توانیم، به یک چندوجهی دیگر دست باییم. این فرآیند، برش یا کوتاه‌سازی نام دارد؛ برای مثال، اگر ما گوشه‌های یک مکعب مربع را ببریم، شکلی شبیه شکل نشان داده شده در زیر به‌دست می‌آید. اگر طوری برش دهیم که وجوه شکل حاصل، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و هشت ضلعی‌های منتظم باشند، شکلی را به‌دست می‌آوریم که مکعب برش داده شده خوانده می‌شود. نشان دهید که همه‌ی یال‌های یک مکعب برش داده شده، به یک اندازه هستند. حجم یک مکعب برش داده شده را که طول همه‌ی یال‌های آن S است، به‌دست آورید. (یک راه خوب، برای ساختن یک مکعب برش داده شده، استفاده از نرم‌افزار فایل‌های هندسه است.)





افلاطون

پس از اهرام مصر، مشهورترین مجموعه‌ی چندوجهی‌ها در زمان‌های باستان، مجموعه‌ی اجسام منتظم است. به نظر می‌رسد تائیتوس، ریاضی‌دان یونانی (۳۶۹ - ۴۱۵ ق.م)، اولین کسی است که با آن‌ها ریاضی گونه برخورد کرده است. افلاطون (۳۴۷ - ۴۲۷ ق.م)،



چهار وجهی منتظم



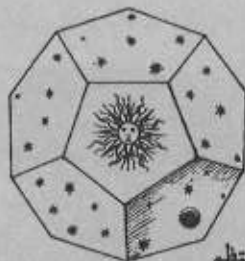
شش وجهی منتظم



هشت وجهی منتظم

دوست تائیتوس، چندوجهی‌های منتظم را با کیهان‌شناسی خود درآمیخت. تیمائوس، در گفت‌وگوی خود، روی چهار «عنصر» - که همه چیز از آن‌ها تشکیل شده است - بحث می‌کند. اجزای زمین به شکل مکعب هستند و به حالتی استوار روی قاعده‌شان قرار دارند. اجزای هوا که هشت وجهی‌های منتظم هستند، سبک‌اند و اگر روی رئوس مخالف نگاه داشته شوند، به آزادی می‌چرخند. اجزای آتش، چهاروجهی‌های منتظم هستند و گوشه‌های تیزی دارند. اجزای آب به شکل بیست وجهی‌های منتظم و تقریباً کروی هستند، و مانند مایعات می‌توانند بفلتند.

۳۰۰ سال ق. م، زمانی که اقلیدس، مقاله‌های خود را می‌نوشت، یونانی‌ها درباره‌ی هندسه‌ی فضایی نظریاتی کاملاً شکوفا داشتند. در کتاب «یازده مقاله» اقلیدس روی ویژگی‌های طولی چندوجهی بحث می‌کند. او در کتاب سیزدهم، نشان داد که چگونه می‌توان یک چهاروجهی منتظم ساخت و «اثبات کرد» که فقط پنج تا از آن‌ها وجود دارند. هرون اوگین کسی بود که به چهاروجهی منتظم به عنوان اجسام افلاطونی اشاره کرد.



دوازده وجهی منتظم



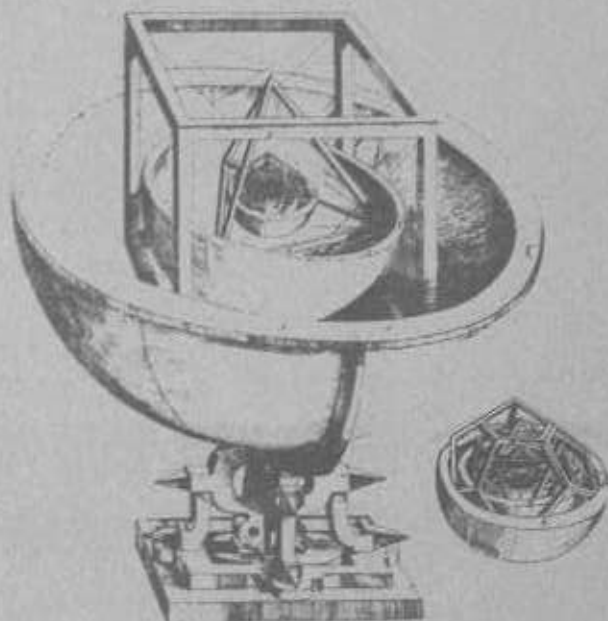
بیست وجهی منتظم

پاپوس (۳۲۰ میلادی) از مطالعات ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق.م) - که در حال حاضر مفقود شده است - روی چندوجهی‌های نیمه منتظم - که اجسام ارشمیدسی نیز نامیده می‌شوند - گزارش می‌دهد.

در دوره‌ی رنسانس، زمانی که نوشته‌های کلاسیک روم و یونان باستان با پشت سر گذاشتن سال‌های تاریک اروپا در دسترس قرار گرفت، خداشناسان و فلاسفه و هنرمندان و دانشمندان کارهای افلاطون و اقلیدس را مورد مطالعه قرار دادند و این مطالعه‌ها علاقه‌ی آنان را نسبت به چندوجهی‌ها برانگیخت.

یوهانس کیپلر (۱۶۳۰ - ۱۶۵۷) با نسبت دادن دوازده وجهی به کل جهان، - شاید چون دوازده وجه آن با دوازده نشان دایرة البروج متناظر بود - به کیهان‌شناسی افلاطون مطالبی افزود. به این ترتیب هر چندوجهی منتظم، با یکی از جنبه‌های دنیا متناظر می‌شد. کیپلر از این فراتر رفت و چندوجهی‌های منتظم را به دستگاه کپرنیک و سیارات در حال حرکت در مدار خورشید وارد ساخت و از آن‌ها برای توضیح وجود شش سیاره (عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل) و فاصله‌ی خاص این سیارات از مرکز خورشید، استفاده کرد. کیپلر جوان به این نظریه که پنج فاصله‌ی بین شش سیاره، با پنج جسم منتظم متناظر است، تمایل پیدا کرد و به کمک آن، دو معما را در یک زمان توضیح داد: چرا دقیقاً پنج چندوجهی منتظم و چرا دقیقاً شش سیاره وجود دارند؟

او پس از تلاش بسیار برای مرتب کردن چندوجهی‌های منتظم جهت تطبیق با این نظریه و داده‌های دانسته شده، به طرح زیر دست یافت. زحل در کروی خارجی حرکت می‌کند که شامل یک



مکعب مربع B	کروی زحل α
چهاروجهی δ	کروی مشتری γ
دوازده وجهی z	کروی مریخ ε
بیست وجهی θ	کروی زمین η
هشت وجهی x	کروی زهره ζ
خورشید λ	کروی عطارد λ

از کیهان نگاری اسرار آمیز کیپلر،
جلد ۱ از کارهای ستاره‌شناسی کیپلر
إ. د. ج. فریش

مکعب است و یک کره در آن قرار گرفته است که مشتری روی آن حرکت می‌کند و خود شامل یک چهاروجهی منتظم است که کره‌ی مریخ در آن قرار دارد. به همین ترتیب کره‌ی مریخ شامل یک دوازده‌وجهی منتظم است، پس کره‌ی زمین شامل یک بیست وجهی، کره‌ی زهره شامل یک هشت وجهی و در نهایت کره‌ی عطارد است.

کپلر از کشف خود چنان به وجد آمده بود که از حامی خود دوک وورتمبرگ، خواست که مدلی طلایی از چندوجهی‌های تودرتو و کره‌ها برای نشان دادن طرح او به دنیا و توضیح جهان مرموز، ساخته شود.

برخی از تجربیات کپلر درباره‌ی چندوجهی‌ها تا حدودی روشن بود. او از مطالعات ارشمیدس (از طریق پاپوس) در زمینه‌ی چندوجهی‌های نیمه منتظم آگاه بود و با شرحی دقیق و استدلالی مورد به مورد، برای تکمیل فهرست خود، صورت کاملی از این اجسام را تهیه کرد.

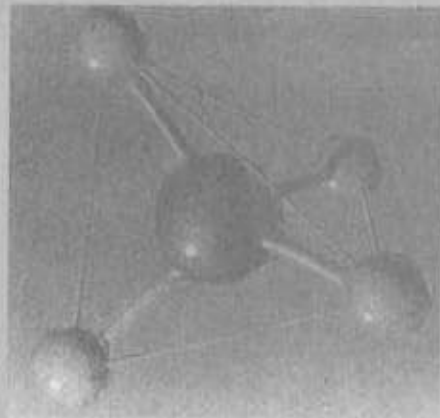
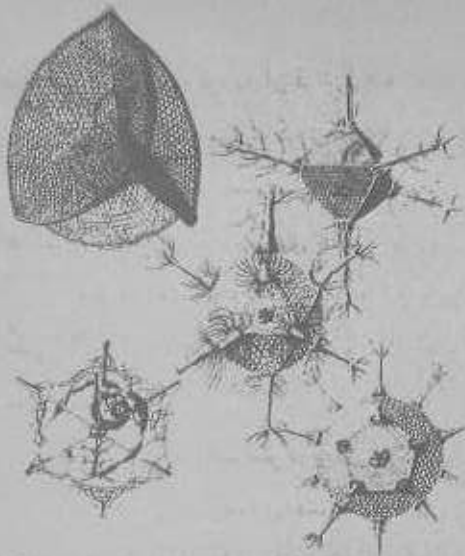
طی این دوره، چندوجهی‌ها توجه بسیاری از دانش‌پژوهان، هنرمندان، صنعت‌گران را به خود جلب کردند از جمله آلبرشت دورر که تصور الگوی خیاط را برای یک چندوجهی طرح کرده بود و لئوناردو داوینچی که کتاب لوکا بالیولی را در زمینه‌ی چندوجهی‌های منتظم و نیمه منتظم مصور نمود. دکارت (۱۶۵۰ - ۱۵۹۶) نیز چندوجهی‌ها را مورد مطالعه قرار داد و فرضیه‌ای را ثابت کرد

که نتیجه‌ی سریع آن، فرمول اوپلر است. او این فرمول مشهور را اولین بار، در نامه‌ای خطاب به کریستین گلدباخ (۱۸۳۳ - ۱۷۵۲) نقل کرد.

این پایان داستان چندوجهی‌ها نیست. ریاضی‌دانان هنوز آن‌ها را مطالعه می‌کنند و دانشمندان برای توصیف اشکال مولکول‌ها، بلورها، و ترکیبات موجودات زنده، به استفاده از آن‌ها ادامه می‌دهند. برخی از این ارتباطات در تصاویر و طرح‌های این صفحه و صفحه‌ی بعد نشان داده شده است.

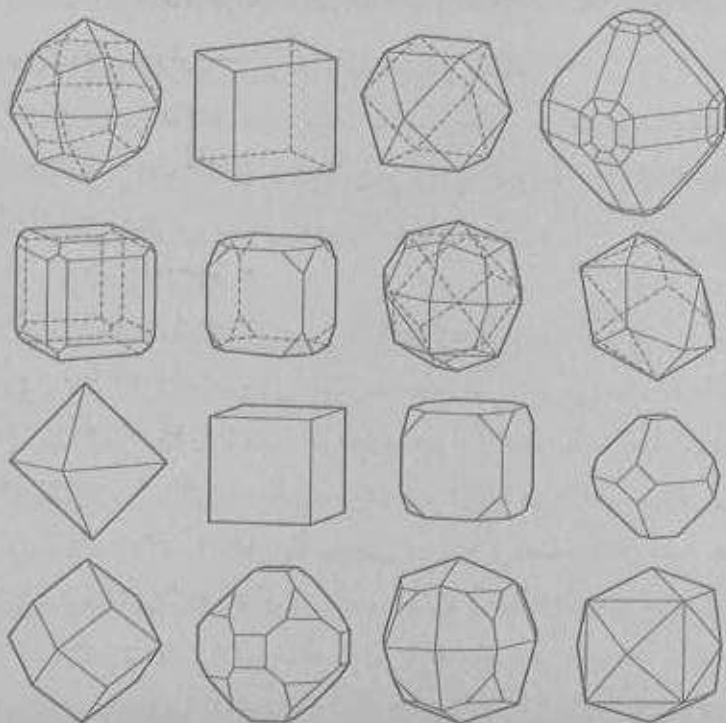


ملیکولیا: حکاکی توسط آلبرشت دورر



تقریب‌های خوبی از چندوجهی‌های منتظم به عنوان
استخوان‌بندی Radiolaria، حیوانات minute marine
گزارش ارتست هگل: نتایج علمی سفر H.M.S چلنجر،
جلد ۱۸، لندن ۱۸۸۷.

درک یک هنرمند از مولکول متان:
معماری مولکول‌ها، توسط: لینوس پاولینگ و راجر
هیوارد، و. د. فرسین، ۱۹۶۴



رسم بلورهای طلا، اطلس اشکال بلورها، توسط: ویکتور گلداشمیت



در مسیر صعود به قله‌ها بهترین راه‌ها را می‌توان یافت
 یخ و خم‌ها و فراز و نشیب‌هایی وجود دارد که تسلیم به آنها
 می‌کند، در مسیر کشف ریاضیات نیز می‌تواند صعود به قله‌ها
 یخ و خم‌ها و فراز و نشیب‌ها می‌توانند راه را آسان

۵-۴- همکاری راهبردها در فراز و نشیب حل مسئله

واقعاً کشف ریاضی چگونه اتفاق می‌افتد؟ مسئله‌ها چگونه حل می‌شوند؟ آیا با به‌کارگیری راهبردها مسئله‌ها حل می‌شوند؟ آیا هر مسئله‌ای را می‌توان با یک راهبرد حل کرد؟ مسئله‌هایی وجود دارند که دست نیافتنی به نظر می‌رسند و وقتی راهبردها را در مورد آن‌ها می‌آزماییم نتایج چندانی به دست نمی‌آید. چرا چنین است؟

قصد آن نداریم که به بحث درباره‌ی این گونه سؤال‌ها بپردازیم. در واقع، این گونه سؤال‌ها پاسخ‌های دقیق و کامل ندارند! اما چیزهایی وجود دارند که راه را نشان می‌دهند. کار ما شبیه آموختن شنا یا فوتبال است. وقتی مهارت به دست می‌آید که همراه با عمل باشد. قصد آن داریم فرصت بی‌نظیری برای عمل کردن در شرایط سخت‌تر فراهم کنیم تا ابتدا تجربه کنیم و با فراز و نشیب‌ها روبه‌رو شویم و سپس در مورد سؤال‌های بالا بیندیشیم و در کلاس بحث همگانی کنیم. تجربه‌ی واقعی آن است که پس از مطالعه‌ی مسئله با شجاعت کتاب را ببندید و فقط با فکر خودتان با آن دست و پنجه نرم کنید. در یک سطح ضعیف‌تر به هر مسئله در این بحث روبه‌رو می‌شویم حل کنیم. این شما و این هم یک مسئله‌ی مبارز طلب!

پنج صفحه در فضا

پنج صفحه در فضا در نظر بگیرید. این پنج صفحه، فضا را به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟

حدود پنج دقیقه درباره‌ی مسئله فکر کنید و پاسخ آن را حدس بزنید. هر حدسی را که به‌ذهنتان می‌رسد، روی یک صفحه‌ی کاغذ یادداشت کنید. هنگامی که تمرکز و دقت نظر بیش‌تری روی مسئله پیدا کردید، حدس جدیدی بزنید و آن را یادداشت کنید. حدس‌های تعدادی از دانش‌آموزان به‌صورت زیر بوده است:

— پنج صفحه فضا را به پنج ناحیه تقسیم می‌کند؛

— تعداد ناحیه‌ها به حالت قرار گرفتن صفحه‌ها بستگی دارد؛ به این سؤال نمی‌توان پاسخ دقیقی داد.

— پنج صفحه فضا را به ده ناحیه تقسیم می‌کند؛

بعضی از دانش‌آموزان معتقد بودند که نمی‌توان حدسی زد و تعدادی دیگر می‌گفتند: ما هنوز مسئله را نفهمیده‌ایم. یکی از دانش‌آموزان زیرک گفت: من معنای «ناحیه» را نمی‌دانم! معلم: به حدس‌هایتان بیش‌تر دقت کنید؛ سعی کنید برای حدس خود دلیلی پیدا کنید. لازم است به نکات زیر توجه داشته باشید.

— داده‌های مسئله چیست؟ مجهول چیست؟

— مسئله از شما چه می‌خواهد؟ سعی کنید آن را بنویسید؛

— سعی کنید راهبردهای حل مسئله را که در این درس آموخته‌اید، به یاد بیاورید و از آن‌ها استفاده کنید؛

— سعی کنید از تجربیات خود در این درس استفاده کنید؛

— راهبرد حل مسئله‌ی وابسته و ساده‌تر را آزمایش کنید.

اکنون زمان دست به کار شدن است. پیش از این که بحث را پی بگیرید خودتان تلاش کنید. از اشتباه کردن نترسید؛ ارزش واقعی در تلاش شماست.

کلاس با مسئله درگیر شد و دانش‌آموزان به‌طور فردی و گروهی به‌زور آزمایی با مسئله پرداختند. تلاش بچه‌ها دلپذیر و شوق‌انگیز بود؛ به‌طوری‌که در پایان جلسه فکر می‌کردند زمان خیلی سریع گذشته است. معلم نیز چون کلاس را پرشور و فعال می‌دید، دخالتی نمی‌کرد و می‌کوشید با راهنمایی‌های جزئی مانع توقف فعالیت گروه‌ها نشود. قرار شد کار روی مسئله را تا جلسه‌ی بعد ادامه دهند و در جلسه‌ی بعدی راه‌حل‌ها ارائه و به بحث همگانی گذاشته شود.

در بین حدس‌ها و راه‌حل‌های گروه‌ها نکات ارزشمند و بحث‌انگیزی مشاهده شد. در این جا مسیر فکری دو گروه را که دارای ویژگی‌های بسیار زیبا و کاملاً متفاوت بودند، به صورت خلاصه بررسی می‌کنیم.

گروه نور (فرشته سادات، ملیحه و شیرین)

فرشته: من به راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط‌تر علاقه‌ی بیش‌تری دارم؛ بهتر است از آن شروع کنیم.

ملیحه: علت این که به این راهبرد بیش‌تر علاقه داری، چیست؟ از کجا معلوم که این راهبرد به حل این مسئله کمک کند؟

فرشته: در واقع، داستان گاوس و معلمش را خیلی دوست دارم و همیشه در خاطرم هست. تاکنون این راهبرد چند بار به‌طور باور نکردنی مرا در حل مسئله کمک کرده است. در مورد سؤال دوم هم، نمی‌دانم؛ شاید کمک نکند.

شیرین: این اولین پیشنهاد است و برای شروع بد نیست. البته من احساس خوبی دارم!

ملیحه: چگونه یک مسئله‌ی ساده‌تر و مرتبط با مسئله‌ی اصلی بسازیم؟

فرشته: یادم می‌آید که در درس مربوط به این راهبرد، روش‌هایی برای ساختن مسائل ساده‌تر بیان شده بود. بهتر است با هم به آن‌ها نگاهی بیندازیم!

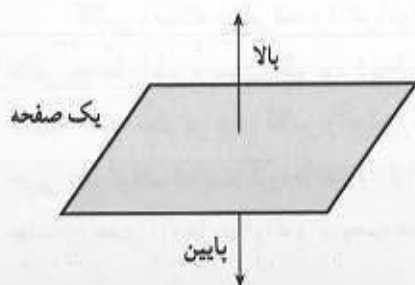
۱- عددهای کوچک‌تر و ساده‌تر را جایگزین عددهای بزرگ کنید.

۲- یک مثال خاص یا چند حالت ساده‌تر را انجام دهید و سعی کنید براساس آن‌ها الگویی بیابید.

۳- ...

:

شیرین: فکر می‌کنم این دو راه کافی است. در مسئله‌ی ما فقط یک عدد وجود دارد؛ ۵. می‌توانیم عدد کوچک‌تر ۴ را جایگزین کنیم؛ در این صورت مسئله ساده‌تر و مشابه به شکل زیر خواهد بود.



«چهار صفحه در فضا در نظر بگیرید. این چهار صفحه، فضا را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟»
فرشته: ما می‌توانیم سه صفحه در نظر بگیریم. حتی دو صفحه یا یک صفحه!
ملیحه: موافقم؛ از ساده‌ترین حالت‌ها شروع

کنیم و بکشیم الگویی پیدا کنیم.

شیرین: برای نمایش یک صفحه، از شکل متوازی الاضلاع استفاده می‌کنیم و توجه داریم که صفحه از هر طرف تا بی‌نهایت ادامه دارد؛ بنابراین، فضا به دو بخش مجزا تقسیم می‌شود.

ملیحه: البته می‌توانیم یک صفحه‌ی کاغذ را به‌عنوان

یک صفحه در نظر بگیریم؛ دو قسمت «زیر» و «رو» به‌وجود

می‌آید و اگر از پهلو به آن نگاه کنیم، مانند یک خط در صفحه

به‌نظر می‌رسد!

فرشته: من کمی شک دارم؛ در واقع، معنای ناحیه را درست نمی‌دانم.

شیرین: ما در صفحه‌ی مختصات با ناحیه آشنا شده‌ایم. ناحیه‌ی اول، ناحیه‌ی دوم و ... در

صفحه‌ی مختصات، ناحیه‌ی قسمتی از صفحه بود. در این‌جا هم «ناحیه» قسمتی از فضا است.

فرشته: این معنی طبیعی است اما آیا واقعاً منظور همین است؟

ملیحه: من پیشنهاد می‌کنم از معلم بپرسیم.

گروه نظرشان را در مورد ناحیه با معلم در میان گذاشتند و معلم نظر آن‌ها را تأیید کرد و افزود:

ناحیه در صفحه به‌وسیله‌ی خط یا خط‌هایی مشخص می‌شود. در فضا، می‌توانید ناحیه را بخشی از

فضا در نظر بگیرید که به‌وسیله‌ی یک صفحه یا تعدادی صفحه، مجزا می‌شود.

دو صفحه در فضا: گروه نور این حالت را خیلی سریع بررسی کرد. خلاصه‌ای از بحث‌های

آن‌ها به شرح زیر است:

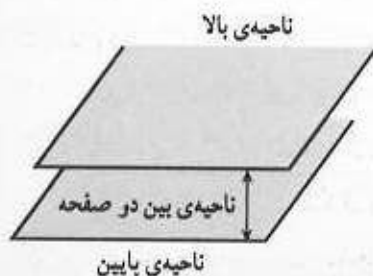
چگونه باید دو صفحه را در نظر بگیریم؟ در این حالت ممکن است وضعیت مانند حالت قبلی

شفاف و ساده نباشد. می‌توانیم سقف کلاس را یک صفحه فرض کنیم و کف کلاس را صفحه‌ای

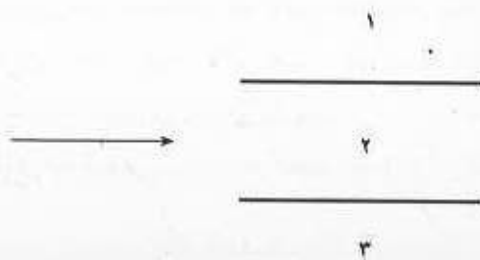
دیگر (کلاس به شکل مکعب مستطیل بود) و فرض کنیم سقف و کف کلاس از چهار طرف امتداد

دارد. بهتر است با دو صفحه‌ی کاغذ، وضعیت سقف و کف کلاس را ایجاد کنیم. دو صفحه را

موازی می‌گیریم: (شکل الف)



الف - دو صفحه‌ی موازی



ب - تصویر دو صفحه‌ی موازی از پهلو

وقتی از پهلو به دو صفحه‌ی موازی نگاه کنیم، آن‌ها به صورت دو خط موازی در صفحه دیده می‌شوند و سه ناحیه را به وجود می‌آورند.

راستی، اگر یک صفحه را کف کلاس و صفحه‌ی دیگر را یکی از دیوارها فرض کنیم، وضعیت دیگری به وجود می‌آید. در این حالت، دو صفحه یک‌دیگر را قطع می‌کنند.



شکل ۱

شکل ۲

اگر از دفتر یا کتاب استفاده کنیم، شکل ۲ به سادگی ساخته می‌شود. اگر از پهلو نگاه کنیم، شکل زیر به دست می‌آید.

ناحیه ت	ناحیه الف
ناحیه ب	ناحیه ب

خنده‌دار است! اول سه ناحیه پیدا کردیم و خیال می‌کردیم کار تمام است. اکنون دو جواب متفاوت داریم! جالب است! ما باید بیش‌ترین یا کم‌ترین تعداد ناحیه‌ها را پیدا کنیم یا همه‌ی جواب‌ها را بیابیم؟ بهتر است در ادامه‌ی کار برای یافتن بیش‌ترین تعداد ناحیه‌ها تلاش کنیم. بعداً برمی‌گردیم و امکان‌های دیگر را هم بررسی می‌کنیم. پس مسئله‌ی ما به صورت زیر خواهد شد.

«بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که پنج صفحه می‌توانند در فضا به وجود آورند،

چند تا است؟»



سرچشمه‌های آب‌های زلال در آن بالاهاست، آب‌های زلال
حاصل‌خیزی و آبادانی به‌وجود می‌آورند. اندیشه‌های ناب مانند
آب‌های زلال، سرزمین‌های فکر ما را آبیاری می‌کند.

مسئله‌ی ۱: اکنون هنگام ساختن حدس جدید است. نتایج به‌دست آمده را مرور کنید و سعی کنید حدس جدیدی را به جدول حدس‌هایتان اضافه کنید. شاید بعضی از حدس‌های اولیه خنده‌دار به نظر برسد و نادرستی آن‌ها بدیهی باشد. این نشانه‌ی پیشرفت و موفقیت شما در فرآیند حل مسئله است.

هنوز مسئله حل نشده است! با این که زیاد فکر نکرده‌ایم، کارهای مفیدی انجام داده و موفقیت‌هایی داشته‌ایم. ما یک «احساس» خوب از مسئله داریم و در فهمیدن مسئله و شفاف کردن آن تا حد مطلوبی پیشرفت کرده‌ایم. اما چگونه این اتفاق افتاد؟ راه‌برد مسئله‌ی ساده‌تر و مشابه، کارساز بود. بهتر است ادامه دهیم و مسئله را در حالت سه صفحه بررسی کنیم.

سه صفحه در فضا حداکثر چند ناحیه به‌وجود می‌آورند؟

پیش از این که فرآیند فکری گروه نور را پی بگیرید، خودتان این حالت را بررسی کنید. این فرصت را از دست ندهید!

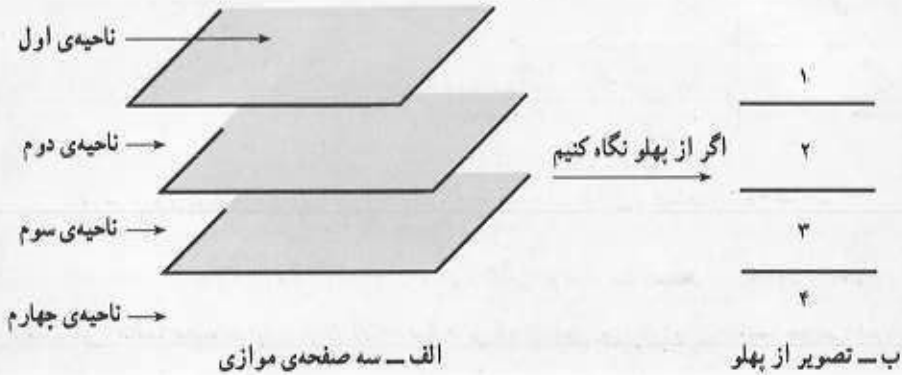
فرشته: برای بررسی این حالت، بهتر است یک‌بار حالت‌های قبل را در نظر بگیریم. برای دو صفحه دو حالت به‌وجود آمد و دو جواب متفاوت.

حالت اول: دو صفحه‌ی موازی؛

حالت دوم : دو صفحه‌ی متقاطع.

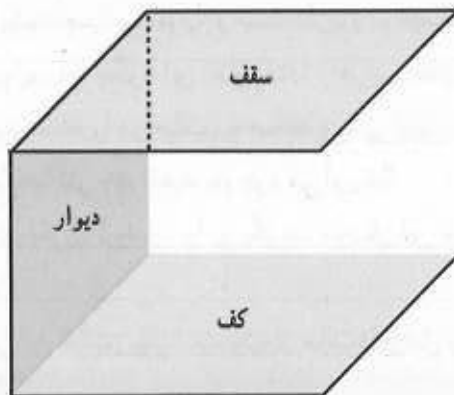
شیرین : بنابراین، برای سه صفحه هم دو حالت داریم : سه صفحه‌ی موازی و سه صفحه‌ی متقاطع.

ملیحه : سه صفحه‌ی موازی مانند یک ساختمان دو طبقه که در آن سقف‌ها صاف باشند و کف طبقه‌ی اول ، سقف طبقه‌ی اول و سقف طبقه‌ی دوم را سه صفحه کاغذ موازی در نظر بگیریم : (شکل الف)



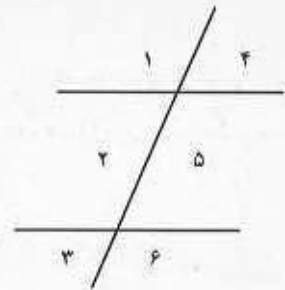
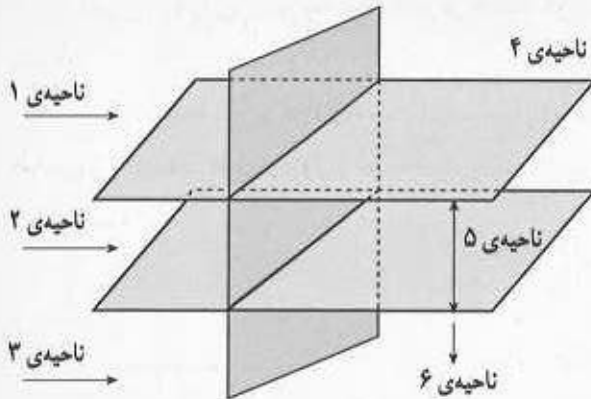
فرشته : اگر از پهلو نگاه کنیم، شکل (ب) به دست می‌آید، در واقع، فضا به صفحه و صفحه‌ها به خط تبدیل می‌شوند. جالب است! مثل این است که از هر کدام یک بعد کم کرده‌ایم.

ملیحه : در حالت دو صفحه‌ی متقاطع، می‌توانیم کف و سقف کلاس را دو صفحه و یکی از دیوارها را صفحه‌ی سوم بگیریم که بر کف و سقف کلاس عمود است. شکل زیر این وضعیت را نشان می‌دهد.



شیرین : البته در این شکل باید فرض کنیم هر یک از صفحه‌ها از هر طرف امتداد دارد.

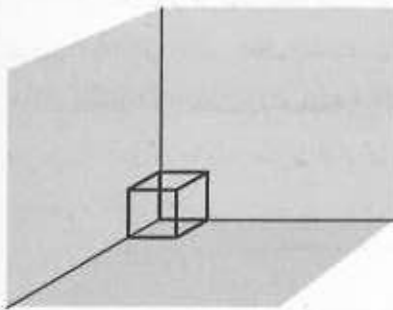
شکل زیر بهتر است.



الف - دو صفحه‌ی موازی و صفحه‌ی سوم متقاطع

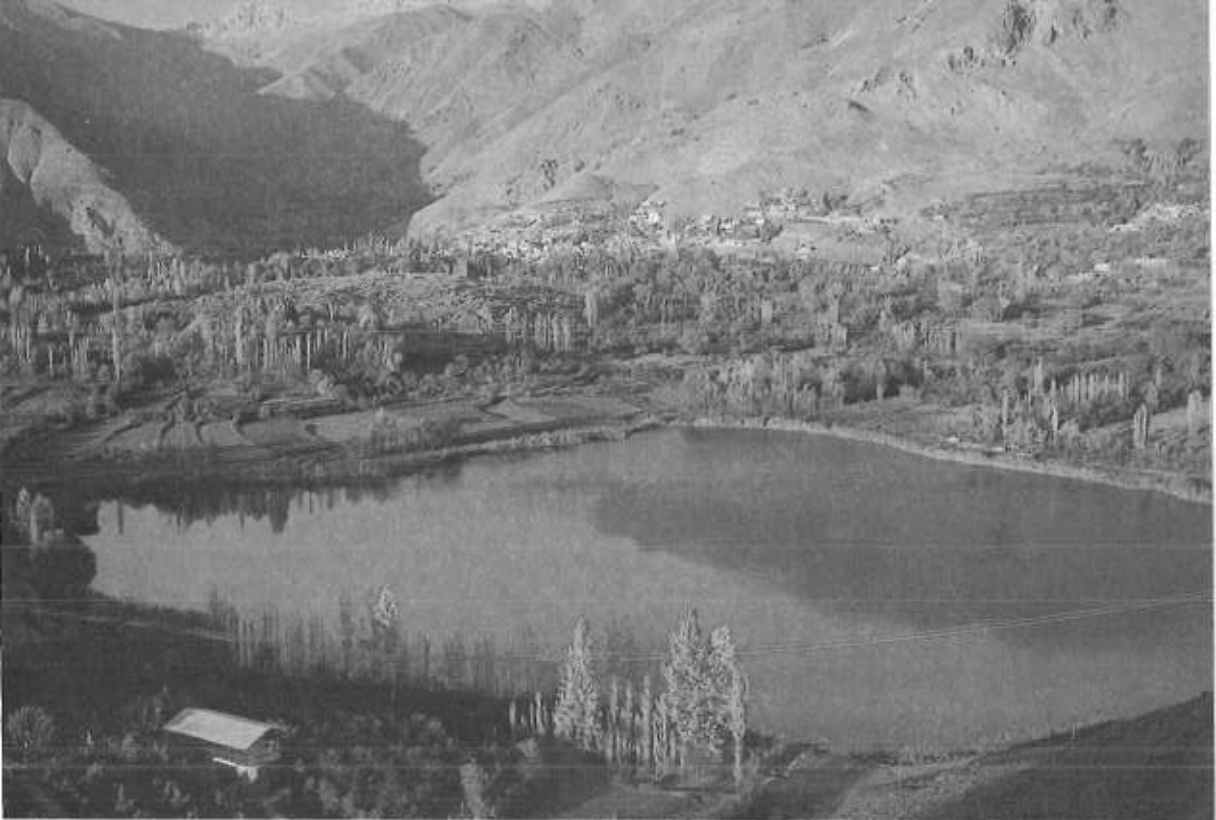
ب - تصویر از پهلو

ملیحه : من شک دارم. نگاهم به گوشه‌ی کلاس بود که سه صفحه‌ی عمود بر هم در آن جا دیدم. این حالت مانند هیچ کدام از دو حالت قبلی نبود. بنابراین، می‌توان حالت سومى هم در نظر گرفت. برای مثال، گوشه‌ی کلاس محل تلاقی دو دیوار و کف کلاس است.



فرشته : در این حالت، سه صفحه دو به دو متقاطع هستند ! پس این یک حالت جدید است در این حالت، چند ناحیه ایجاد می‌شود؟ یک راه قابل رؤیت کردن ناحیه‌ها، این است که یکی از صفحه‌ها را صفحه‌ی کاغذ (دفتر یا کتاب در حالت افقی) و دو صفحه‌ی دیگر را دو صفحه‌ی عمود بر هم تصور کنیم. اگر دو صفحه‌ی عمود بر هم را روی صفحه‌ی کاغذ طوری قرار دهیم که فصل مشترک دو صفحه بر صفحه‌ی کاغذ عمود شود، فصل مشترک دو صفحه‌ی عمود بر هم و صفحه‌ی کاغذ به صورت زیر خواهد بود.

ناحیه‌ی الف	ناحیه‌ی ت
ناحیه‌ی ب	ناحیه‌ی پ



بنابراین، در بالای صفحه‌ی کاغذ چهار ناحیه تشکیل می‌شود و امتداد صفحه‌های عمود بر هم در زیر صفحه‌ی کاغذ، چهار ناحیه‌ی دیگر به‌وجود می‌آورند. پس کل ناحیه‌ها هشت تا می‌شود. ما همه‌ی حالت‌های ممکن برای سه صفحه را بررسی کردیم؛ تعداد ناحیه‌ها، برای حالت سه صفحه‌ی موازی ۴ تا، برای حالت دو صفحه‌ی موازی و صفحه‌ی سوم متقاطع ۶ تا و برای حالت سه صفحه‌ی دوبه‌دو متقاطع ۸ تا بود؛ بنابراین، بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که به‌وسیله‌ی سه صفحه در فضا ایجاد می‌شود، ۸ تا است.

شیرین: مسئله برای سه صفحه حل شد. پیشنهاد می‌کنم آن‌چه را تا کنون به‌دست آورده‌ایم، در جدولی مرتب کنیم؛ شاید الگویی پیدا شود. همه موافق بودند و جدول زیر را تشکیل دادند.

تعداد صفحه‌ها	بیش‌ترین تعداد ناحیه‌ها
۱	۲
۲	۴
۳	۸

فرشته: راستی، وقتی هیچ صفحه‌ای نداریم، چند ناحیه داریم؟ شاید پیشنهاد خنده‌دار باشد

اما بعضی مواقع همین چیزهای خنده‌دار می‌توانند سرچشمه‌ها و ایده‌هایی به ما بدهند. به هر حال ضرری ندارد. حالت صفر صفحه را نیز به جدولی اضافه کردند.

تعداد صفحه‌ها	بیش‌ترین تعداد ناحیه‌ها
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸

شیرین: من الگویی می‌بینم! شما چه طور؟

مسئله‌ی ۲: زمان آن رسیده است که به جدول حدسیات خود حدس جدیدی بیافزایید! برای چهار صفحه، پنج صفحه.

گروه نور حدس جدیدی را به جدول حدسیات خود اضافه کردند. اما برای بررسی مسئله در حالت چهار صفحه، رسم شکل و پیدا کردن حالت‌های مختلف مشکل‌تر و پیچیده‌تر بود. اکنون وقت آن است که با حالت چهار صفحه دست و پنجه نرم کنید! بنابراین، بیش از این که بحث را دنبال کنید، حالت چهار صفحه را بررسی کنید:

بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی چهار صفحه در فضا به وجود می‌آید، چقدر است؟ یک گروه دیگر از دانش‌آموزان به طور باور نکردنی و شگفت‌انگیز با راهکاری بسیار زیبا و هوشمندانه به مسئله‌ی پنج صفحه در فضا پرداخته بودند. خلاقیتی کم‌نظیر در روش این گروه وجود داشت. در ادامه‌ی بحث به بررسی فرآیند فکری گروه هاجر (الهه سادات، الهام و نازنین) می‌پردازیم. الهام گزارش بحث‌های گروه خود را این گونه بیان کرد: ما ابتدا سعی کردیم شهودی از مسئله به دست آوریم. هر چه تلاش کردیم نتوانستیم شکلی رسم کنیم. داشتیم ناامید می‌شدیم. این ایده‌ی نازنین! بود که مسیر فکری ما را مشخص کرد. او گفت: فکر می‌کنم مسئله‌ی سختی است و پیشنهاد کرد که از راه‌برد مسئله‌ی ساده‌تر و مشابه استفاده کنیم. نازنین آنگاه توضیح داد:

در فصل قبل، دیدیم که چگونه با مشابهت از روی چند ضلعی‌ها در صفحه، چند وجهی‌ها را در فضا تعریف کردیم و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار دادیم. در واقع، صفحه (دو بُعد) به فضا (سه بُعد) تعمیم پیدا کرد و چند ضلعی (در صفحه) به چند وجهی (در فضا) تعمیم پیدا کرد. علاوه بر این، در آن فصل دیدیم که چند ضلعی‌ها از چند وجهی‌ها ساده‌ترند. از این فکر استفاده کرده و

پیشنهاد کردم که برای ساختن یک مسئله‌ی ساده‌تر و مشابه، یک بُعد از فضا و یک بُعد از صفحه کم کنیم؛ بنابراین، مسئله‌ای ساده‌تر به صورت زیر ساخته شد.

«پنج صفحه را در نظر بگیرید؛ این پنج صفحه، فضا را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟»

↓ ↓ ↓

«پنج خط را در نظر بگیرید؛ این پنج خط؛ صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟»

در این جا الهه گفت: چه طور است یک بار دیگر از هر کدام یک بُعد کم کنیم؟ شاید مسئله‌ی ساده‌تری به دست آید؛ همه موافق بودند؛ بنابراین، مسئله‌ی زیر ساخته شد.

«پنج نقطه را در نظر بگیرید؛ این پنج نقطه، خط را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟»

پیش از پی‌گیری بحث، خودتان این مسئله را به طور انفرادی بررسی کنید. در بررسی این مسئله، اتفاق جالبی افتاد. گویی هر سه نفر یک جور فکر می‌کردیم. هیچ بحث و اختلاف نظری پیش نیامد. روش ما این گونه بود:

از ساده‌ترین حالت یعنی ۰ نقطه شروع کردیم؛ سپس، ۱ نقطه و الگوی زیر به طور طبیعی ساخته شد.

ناحیه‌ی ۱	ناحیه‌ی ۱ ناحیه‌ی ۲	ناحیه‌ی ۱ ناحیه‌ی ۲ ناحیه‌ی ۳	ناحیه‌ی ۱ ناحیه‌ی ۲ ناحیه‌ی ۳ ناحیه‌ی ۴	...
				...
نقطه ۰	نقطه ۱	نقطه ۲	نقطه ۳	...
ناحیه ۱	ناحیه ۲	ناحیه ۳	ناحیه ۴	...

برای خودمان هم جالب بود؛ بدون هیچ درگیری و تلاش فکری، روند بررسی حالت‌های ساده، جمع‌آوری اطلاعات و یافتن الگو را پیموده بودیم. در این جا الهه پرسید: اگر n نقطه داشته باشیم، چند ناحیه به وجود می‌آید؟ در واقع من فکر می‌کنم این مسئله تعمیم مسئله از ۵ نقطه روی خط به حالت کلی n نقطه روی خط است.

من و نازنین هم زمان گفتیم: معلوم است، $n+1$ ناحیه؛ آنگاه الهه گفت: احساس می‌کنم ما یک فرمول کشف کرده‌ایم؛ یعنی،

(n+1) ناحیه روی خط → n نقطه روی خط

نازنین گفت: می‌توانیم این رابطه را به زبان ریاضی بنویسیم.
از نتیجه‌ی گفت‌وگوهایمان این رابطه حاصل شد:

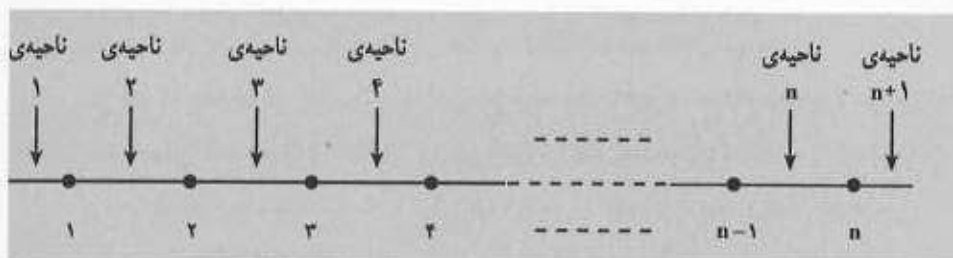
$$L(n) = n + 1$$

در واقع، ابتدا نماد f پیشنهاد شد ولی الهه که به زبان انگلیسی تسلط بیشتری دارد، گفت که خط به انگلیسی، Line، می‌شود. بهتر است حرف اول کلمه‌ی Line را انتخاب کنیم که ما را به یاد خط بیندازد. در این هنگام، یکی از بچه‌ها پرسید: منظور از $L(n)$ چیست؟ الهام در پاسخ روی تابلو نوشت:

$$L(n) = n + 1 = \text{تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی } n \text{ نقطه‌ی متمایز روی خط ایجاد می‌شود.}$$

یکی دیگر از بچه‌ها گفت: من احساس می‌کنم شما فقط یک قانون‌مندی در مورد ناحیه‌ها و نقطه‌های روی یک خط حدس زده‌اید و برای درستی حدس خود استدلالی ارائه نکرده‌اید.

مسئله‌ی ۳: پیش از این که پاسخ گروه هاجر را مطالعه کنید؛ برای قانون ناحیه‌ها و نقطه‌های روی خط استدلالی ارائه کنید. سپس در این باره به بحث همگانی (یا گروهی) بپردازید.
الهام شکل زیر را کشید و سپس استدلال گروه خود را براساس آن بیان کرد.



مسئله‌ی ۴: استدلال بالا را به صورت مشروح بنویسید و در مورد درستی یا نادرستی آن بحث کنید. آیا این استدلال دقیق و کامل است؟

الهام: موفقیت، خشنودی و اعتماد به نفس، احساس‌هایی بود که همگی داشتیم. می‌دانستیم که هنوز به مسئله‌ی اصلی نرسیده‌ایم ولی خوشحال بودیم که چیزهای خوبی به دست آورده‌ایم و کاملاً امیدوار شدیم. برای ادامه‌ی کار توافق کردیم که یک‌بار فرآیند کارمان را مرور کنیم؛
با مسئله‌ی پنج صفحه در فضا شروع کردیم. راهبرد مسئله‌ی ساده‌تر و مشابه و ایده‌هایی که از

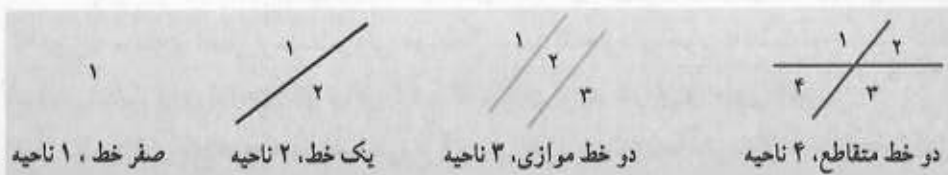


فصل قبل یاد داشتیم به ما کمک کرد تا مسئله‌ای ساده‌تر بسازیم و یک مرحله‌ی دیگر روش کم کردن یک بُعد را انجام دادیم و به این مسئله رسیدیم :

«پنج نقطه روی یک خط چند ناحیه به وجود می‌آورد؟» اکنون این مسئله با موفقیت حل شده است و ما الگویی در حالت n نقطه به دست آورده‌ایم ؛ بنابراین، در مسیر بازگشت به سمت مسئله‌ی اصلی هستیم و اکنون نوبت بررسی مسئله در حالت «خط‌ها در صفحه» است ؛ یعنی :

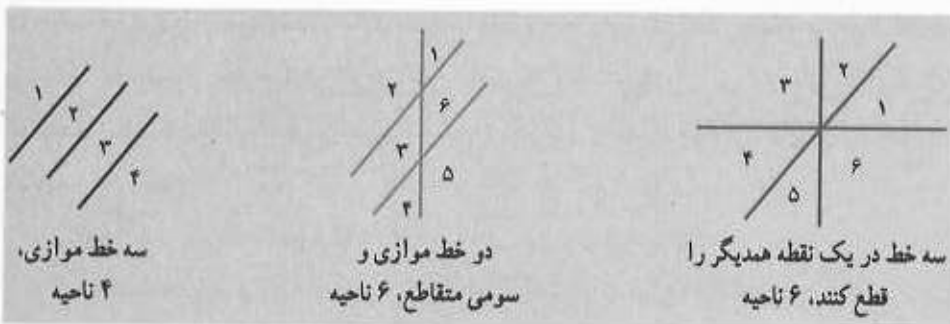
پنج خط در صفحه در نظر بگیرید؛ این پنج خط، چند ناحیه به وجود می‌آورند؟ ایست! سعی کنید خودتان مسئله را بررسی کنید و آنگاه بحث را ادامه دهید.

در این جا الهام پیشنهاد کرد که گزارش گروه هاجر را الهه ادامه دهد و معلم پذیرفت، الهه : بدون لحظه‌ای درنگ از ساده‌ترین حالت‌ها شروع کردیم و یک یک آن‌ها را مورد بررسی قرار دادیم. سپس اطلاعات به دست آمده را مرتب کردیم. در واقع، بحث و گفت و گویی انجام نشد. گویی هر سه نفر مستقل از هم یک جور عمل کرده بودیم. اطلاعات به دست آمده را با هم کنترل کردیم. نتیجه به صورت زیر شد :



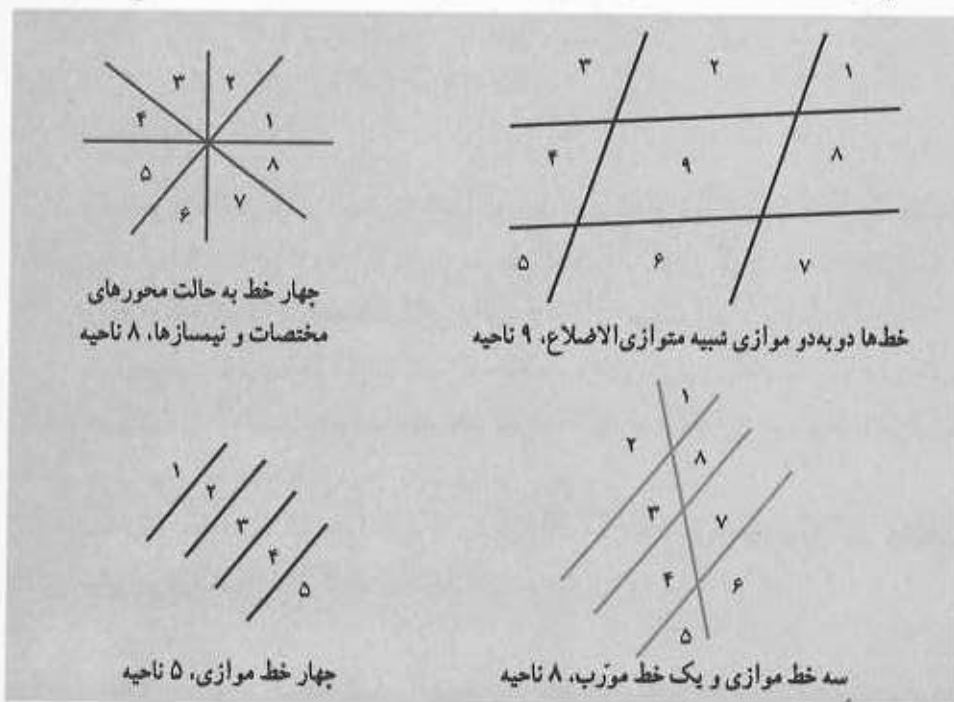
بعد از بررسی دو خط مشاهده کردیم که دو جواب متفاوت برای مسئله به دست آمده است. غیر منتظره بود؛ زیرا همیشه فکر می کردیم که مسئله‌ی ریاضی یک جواب دارد! تصمیم بر این شد که بزرگ‌ترین جواب را در نظر بگیریم.

سه خط در صفحه: نتیجه در این حالت به صورت زیر شد.



جالب بود! در این حالت نیز دو جواب به دست آمد. ۶ را به عنوان جواب انتخاب کردیم و به حالت بعد رفتیم.

چهار خط در صفحه: روش کار برایمان روشن بود؛ مانند دو حالت قبل شروع کردیم:

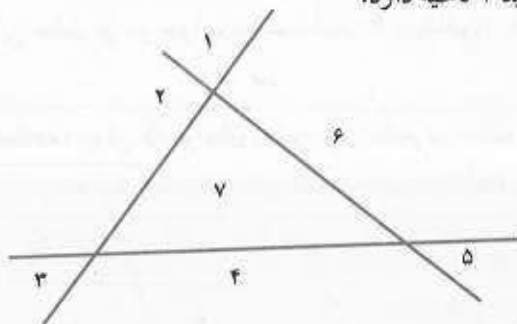


سه وضعیت اول را دقیقاً مشابه سه وضعیت سه خط در صفحه رسم کردیم، اما وضعیت چهارم

با ایده گرفتن از متوازی الاضلاع به فکر نازنین رسید. در این حالت عددهای ۵، ۸، ۸ و ۹ به دست آمد که تعداد ناحیه‌ها را در وضعیت‌های مختلف «چهار خط در صفحه» نشان می‌دهد.

الهام داده داد: نمی‌دانم چه شد! نگاهم به شکل‌ها در حالت سه خط و حالت چهار خط در صفحه بود و گویی بی‌اختیار آن‌ها را با هم مقایسه می‌کردم. ناگهان متوجه شدم که بین سه شکل اول در حالت چهار خط و سه وضعیت حالت سه خط تناظر وجود دارد ولی شکل چهارم تناظری ندارد. بی‌درنگ احساسم را مطرح کردم. نازنین فوراً گفت که حالت چهارم را از روی متوازی الاضلاع ساخته‌ایم. آها! متوجه شدم، می‌توانیم از مثلث ایده بگیریم و وضعیت چهارمی هم برای سه خط در صفحه ایجاد کنیم.

الهام گفت: از کجا معلوم که تعداد ناحیه‌های بیش‌تری ایجاد کند؟
من گفتم: ضرری ندارد: آزمایش می‌کنیم (راهربرد حدس و آزمایش). آنگاه شکل زیر را رسم کردم.
نازنین: نگاه کنید ۷ ناحیه دارد!



واقعاً خوش شانس بودیم؛ بله. در حالت سه خط در صفحه، چهار وضعیت متفاوت به دست آمده بود و پاسخ‌ها ۴، ۶، ۶ و ۷ بود. خوشحالی من طولی نکشید و سؤالی نگران‌کننده به ذهنم رسید:

از کجا معلوم است که وضعیت دیگری برای سه خط در صفحه وجود ندارد؟

شاید وضعیت دیگری وجود داشته باشد که تعداد ناحیه‌های بیش‌تری ایجاد کند. شاید در حالت دو خط هم اشتباه کرده باشیم! در حالت چهار خط چه‌طور؟ شاید به بیراهه می‌رویم. چگونه می‌توانیم مطمئن شویم همه‌ی وضعیت‌ها را در هر حالت بررسی کرده‌ایم؟

لحظات با سکوتی سنگین می‌گذشت که صدای زنگ مدرسه ما را به خود آورد. این جلسه‌ی کلاس خیلی سریع گذشت! قرار گذاشتیم تا جلسه‌ی بعد با هم روی مسئله کار کنیم.

مسئله‌ی ۵: الهام سؤال‌هایی اساسی مطرح کرد. با بازنگری مسیر فکری گروه هاجر، در مورد پاسخ سؤال‌ها تصمیم‌گیری کنید. تصمیم‌گیری وقتی درست است که بر مبنای استدلال درست باشد.

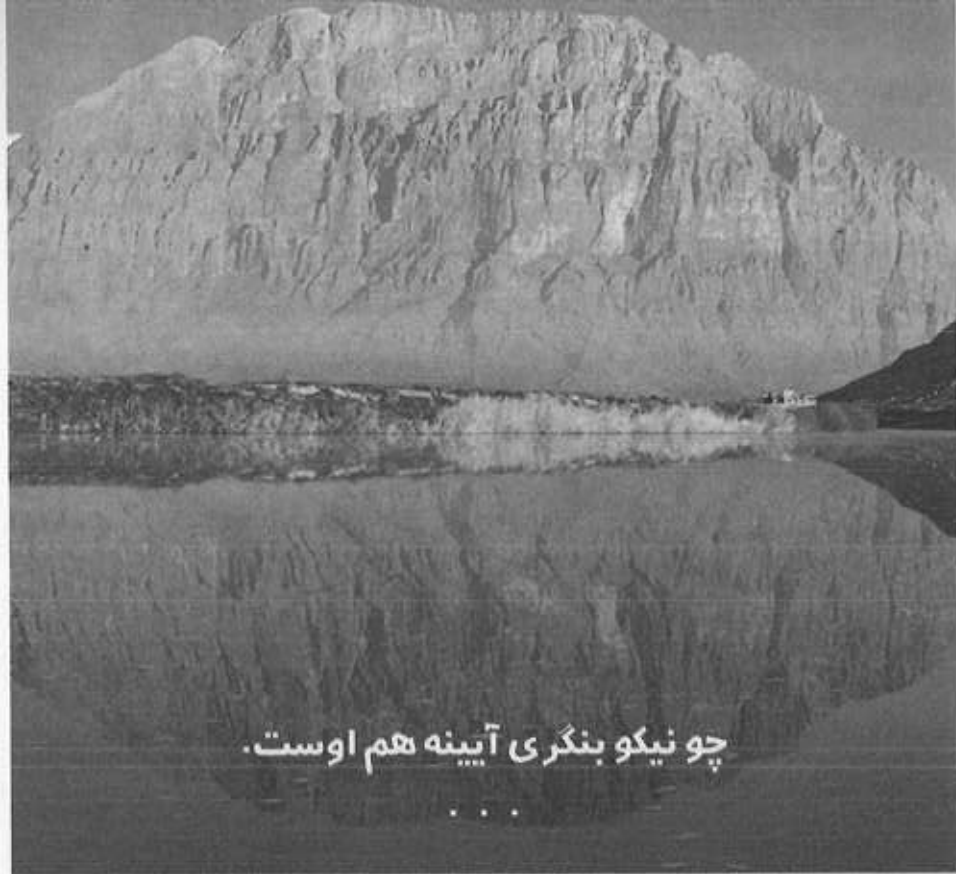
الهه : مسئله، فکر همگی ما را مشغول کرده بود. حاضر نبودیم شکست را بپذیریم. هر یک از ما چند بار فرآیند کار را با دقت بررسی کرده بودیم. وقتی کارهای فردی خودمان را با هم بررسی کردیم، نتایج جالبی به دست آمد و روزه‌های امید پدیدار گشت. ما با استدلال مطمئن شدیم که در حالت دو خط و سه خط در صفحه، همه‌ی وضعیت‌های گوناگون قرار گرفتن خط‌ها در صفحه را در نظر گرفته و اطلاعات بیش‌تری به دست آورده‌ایم. اکنون پیشنهادهایی برای ادامه‌ی کار داشتیم.

مسئله‌ی ۶ : اعضای گروه هاجر چگونه از درستی کار خود در حالت دو خط و سه خط در صفحه مطمئن شده بودند؟ استدلال آن‌ها چه بوده است؟
اطلاعات و پیشنهادها را مرتب کردیم : (جدول گروه هاجر)

- در حالت دو خط در صفحه، بیش‌ترین ناحیه مربوط به وضعیت دو خط متقاطع است.
- در حالت سه خط در صفحه، بیش‌ترین ناحیه مربوط به وضعیتی است که از برخورد سه خط یک مثلث پدید می‌آید.
- وضعیتی که در آن خط‌ها موازی‌ند، اهمیتی ندارد!
- وضعیتی که در آن خط‌ها یک‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، بی‌ارزش است!
- نقطه‌ی تلاقی خط‌ها در یافتن الگو برای حل مسئله مهم است.
- تعداد نقاط برخورد روی هر خط در یافتن الگو نقش دارد.
- تعداد نقاط تلاقی بسیار مهم است.

در هر حالت فقط آخرین وضعیت‌ها اهمیت دارند.
پس از تنظیم اطلاعات و پیشنهادها یک‌بار دیگر آن‌ها را واری کردیم؛ چیزی جا نیفتاده بود. در این فکر بودیم که برای ادامه‌ی کار از کدام پیشنهاد شروع کنیم. یک پیشنهاد این بود که به همان ترتیبی که نوشته‌ایم، شروع کنیم و با راه‌برد حدس و آزمایش به پیش برویم اما می‌دانستیم که این کار ممکن است وقت زیادی بگیرد. در این فکرها بودیم که الهام پیشنهاد کرد از آخرین پیشنهاد شروع کنیم. ادامه‌ی کار را با گفت‌وگوهای پی‌می‌گیریم.

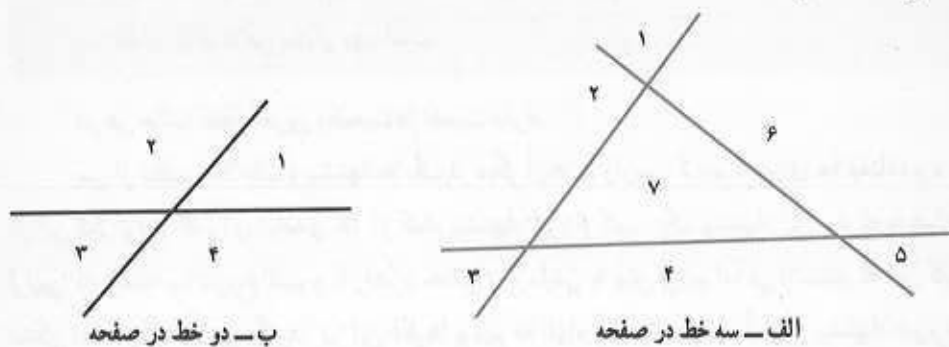
نازنین : آیا دلیلی هم برای این کار وجود دارد؟
الهام : من نسبت به پیشنهاد آخر احساس خوبی دارم؛ گویی به من الهام شده است. البته یک دلیل هم وجود دارد و آن این است که بیش‌ترین تعداد ناحیه‌ها از وضعیت‌های آخر به دست آمد.
نازنین : خوب، حالا چه کار باید بکنیم؟



چو نیکو بنگری آئینه هم اوست.

...

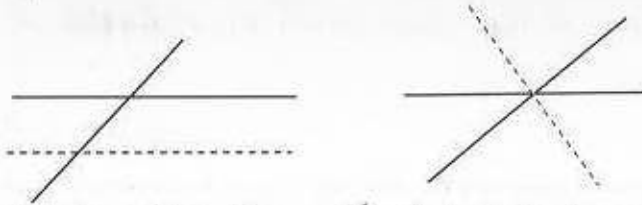
الیه : همین طور که به شکل ها در آخرین وضعیت نگاه می کردم، نکته ای به نظرم رسید. به این شکل ها نگاه کنید :



اگر از شکل «الف» یک خط را پاک کنیم، شکل «ب» به دست می آید. نازنین : جالب است! اگر روی شکل «ب» یک خط رسم کنیم، شکل «الف» به دست می آید! الیه : البته، به شرط این که خطی که رسم می کنیم با هیچ یک از دو خط موازی نباشد و از نقطه ی تلاقی آن ها نیز نگذرد.

الهام : اگر این شرط ها را رعایت نکنیم، چه اتفاقی می افتد؟

الهه : شکل های زیر به دست می آید.



نازنین : عجیب است! وضعیت های دیگری در حالت سه خط در صفحه به دست آمد. انگار

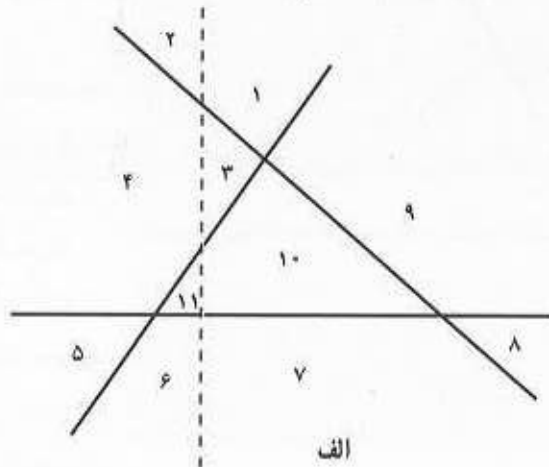
همه چیز به هم ربط دارد!

الهام : صبر کنید! ساکت! فکر می کنم فهمیدم باید چه کار کنیم. همین حرف های ظاهراً پراکنده ی

شما راه را مشخص می کند. بیایید آزمایش کنیم.

الهه : ولی تو که چیزی به ما نگفتی! چه چیزی را آزمایش کنیم؟

الهام : فقط نگاه کنید (شکل زیر را رسم کرد) :



خط چهارم را روی این شکل (آخرین وضعیت سه خط در صفحه) طوری رسم می کنیم که با

هیچ کدام از سه خط قبلی موازی نباشد (هر سه خط را قطع کند) و از هیچ کدام از نقاط تلاقی قبلی

عبور نکند. شماره گذاری می کنیم : ناحیه ی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱. بله : پاسخ در

حالت ۴ خط در صفحه ۱۱ است : یعنی بیش ترین تعداد ناحیه ها در حالت ۴ خط در صفحه ۱۱ است.

الهه : راستی! فکر می کنم این شکل با شکل هایی که در حالت چهار خط در صفحه رسم کرده

بودیم، تفاوت دارد. بهتر است یک بار این شکل را با شکل هایی که قبلاً برای چهار خط در صفحه

رسم کرده ایم، مقایسه کنیم.

الهام : درست است : این یک شکل جدید است و تعداد ناحیه های آن بیش تر است. در واقع،

در این حالت، عددهای ۵، ۸، ۹ و ۱۱ به دست آمدند.

الهه: من کمی نگران هستم؛ در واقع، مانند «مار گزیده‌ای» شده‌ام «که از ریسمان سیاه و سفید می‌ترسند».

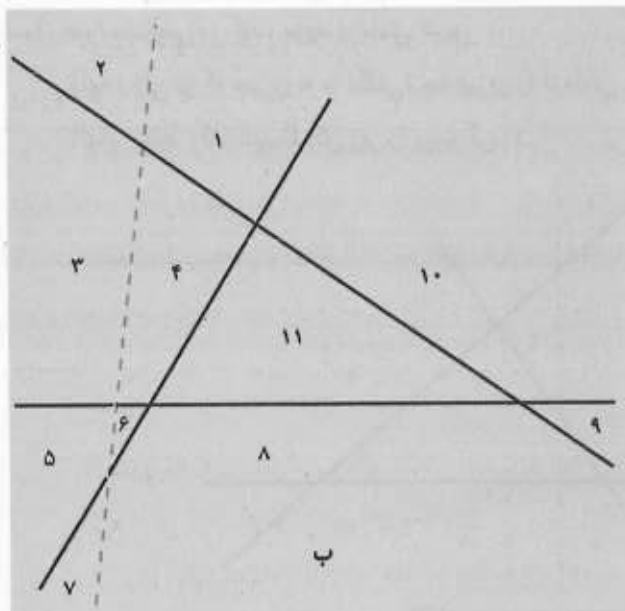
الهام: منظورت را نمی‌فهمم.

الهه: ممکن است وضعیت دیگری برای چهار خط در صفحه وجود داشته باشد که تعداد ناحیه‌هایش بیش‌تر باشد. ما قبلاً یک بار اشتباه کرده‌ایم. باید مطمئن شویم که کاملاً درست عمل می‌کنیم. نازنین: موافقم. پیشنهاد می‌کنم وضعیت‌های دیگری را که در آن خط چهارم می‌تواند رسم

شود آزمایش کنیم. راستی!

می‌توانیم از خودکار به جای خط چهارم استفاده کنیم و آن را روی شکل حرکت دهیم و هر بار تعداد ناحیه را بشماریم.

آزمایش‌های زیادی انجام گرفت. وقتی هر یک از دو شرط (با هیچ یک از خط‌های قبلی موازی نباشد - از هیچ یک از نقاط تلاقی قبلی نگذرد) را در نظر نمی‌گیریم، تعداد ناحیه‌ها کم‌تر می‌شد. هنگامی که هر دو شرط را رعایت می‌کردیم، دو



وضعیت بیش‌تر وجود نداشت: یا خط چهارم مثلث را قطع می‌کرد (شکل الف) یا خط چهارم مثلث را قطع نمی‌کرد (شکل ب). در هر دو حالت، تعداد ناحیه‌ها ۱۱ تا بود. این روش را در حالت پنج خط در صفحه و شش خط در صفحه نیز انجام دادیم و تعداد ناحیه‌ها را تعیین کردیم بحث را بی‌می‌گیریم. نازنین: آیا می‌توانیم مانند نقاط روی خط، مسئله را در حالت کلی حل کنیم؟ یعنی اگر n خط داشته باشیم؛ بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که در صفحه به وجود می‌آورند چندتا است؟

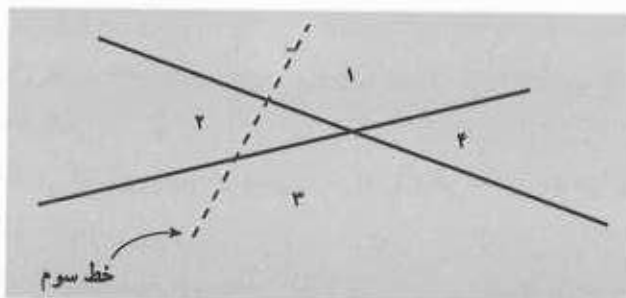
الهام: روش ما در مورد هر عددی عمل می‌کند، آن قدر ادامه می‌دهیم تا به n برسیم، پاسخ به دست می‌آید.

الهه: نگرانی من هنوز به قوت خود باقی است. دلیل ما برای درستی کارمان، تجربه کردن

بود. احساس می‌کنم این روش خیلی هم ریاضی نیست. در واقع اگر تعداد کم باشد، تجربه و آزمایش کردن عملی است. در صورتی که تعداد وضعیت‌ها زیاد باشد، ممکن است تا آخر عمر هم آزمایش کنیم و به پاسخ نرسیم! حتی در مورد رسم خط چهارم و آزمایش کردن به وسیله‌ی خودکار یا رسم خط هم مشکوک هستم؛ زیرا می‌توان بی‌شمار خط در صفحه رسم کرد که سه خط دیگر را قطع کنند. با تجربه و آزمایش نمی‌توان بی‌شمار حالت را بررسی کرد. آیا روش دیگری وجود ندارد تا به وسیله‌ی آن بتوانیم استدلال کنیم و به پیش برویم؟

مسئله‌ی ۷: درباره‌ی نظریات الهه بحث کنید و درستی یا نادرستی آن‌ها را بررسی کنید.
 نازنین: سؤالی جدی مطرح کردی. شاید لازم باشد دیدگاهمان را تغییر دهیم. من یک پیشنهاد تکراری دارم!
 پیشنهاد نازنین: بهتر است یک بار دیگر این بخش از کارمان را مرتب و آن را واریسی کنیم؛ شاید ایده‌ی دیگری پیدا شود.
 اعضای گروه هاجر به پیشنهاد نازنین عمل کردند و با بحث‌هایی که بین آن‌ها انجام شد، به نتایج خوبی رسیدند. آن‌ها با استدلال مطمئن شدند که در حالت چهار خط در صفحه، کارشان نقص ندارد. بحث را از زبان خودشان پی می‌گیریم.

مسئله‌ی ۸: استدلال گروه هاجر چه بوده است؟
 الهه: پس موافقتی که از ابتدا شروع کنیم!
 ۱- وقتی یک خط به حالت دو خط در صفحه (دو خط متقاطع) اضافه می‌شود، ناحیه‌های ۱،



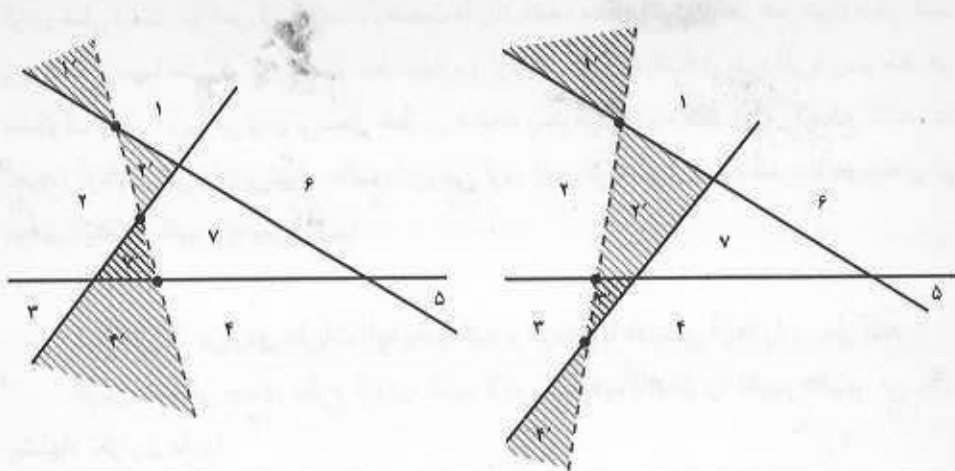
۲ و ۳ هر کدام به دو ناحیه تقسیم می‌شوند؛ یعنی، سه ناحیه به تعداد ناحیه‌ها اضافه شد.

$$4 + 3 = 7$$

↓
سه ناحیه‌ی جدید

↙ چهار ناحیه برای حالت
دو خط در صفحه

۲- از سه خط به چهار خط می‌رویم؛ وقتی خط چهارم را اضافه می‌کنیم، دو وضعیت پدید می‌آید.



در هر دو وضعیت، خط چهارم از چهار ناحیه می‌گذرد و هر ناحیه را به دو بخش تقسیم می‌کند؛ بنابراین،

$$7 + 4 = 11$$

↓
تعداد ناحیه‌ها در حالت
چهار ناحیه‌ی جدید سه خط در صفحه

نازنین: یک الگوی جدید می‌بینم! الگوی که می‌بینم...

الهام: این الگوی که می‌گوی درست است، اما هنوز برای اثبات این که این الگو برای همه‌ی حالت‌ها وجود دارد، استدلالی نداریم. تنها یک حدس جدید به‌دست آوردیم که بهتر است آن را به‌جدول حدس‌هایمان اضافه کنیم.

مسئله‌ی ۹: نوبت حدس جدید است. براساس این اطلاعات حدسی بزنید و آن را به جدول حدس‌هایتان اضافه کنید.

نازنین: فکر می‌کنم لازم است حدسمان را در مورد صفر خط در صفحه، یک خط در صفحه و دو خط در صفحه آزمایش کنیم.

الهه این کار را خیلی سریع انجام داد و اعلام کرد: در این حالت‌ها نیز حدس ما درست است. الهام غرق در شکل‌ها بود و با خود می‌گفت: باور کردنی نیست! هر چه بیش‌تر دقت می‌کنیم چیزهای جدیدی می‌فهمیم.

الهه: الهام با خودت چه می‌گویی؟

اکنون قله دیده می شود و تا فتح آن چیزی نمانده است.

الهام: به این شکل ها نگاه کنید:

تعداد خط ها

یک خط اضافه می کنیم

ناحیه های جدید

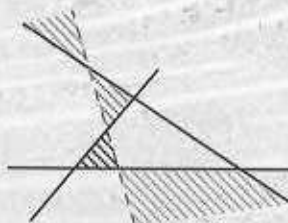
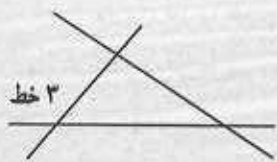
خط جدید

خط

خط ۱

خط ۲

خط ۳



وقتی خط جدیدی رسم می‌کنیم، دو شرط [با خط دیگری موازی نباشد و از هیچ‌یک از نقاط تلاقی خط‌ها نگذرد] را رعایت می‌کنیم؛ بنابراین، خط جدید همه‌ی خط‌های قبلی را قطع می‌کند و تعداد ناحیه‌های جدیدی که با افزودن خط جدید ایجاد می‌شود، برابر تعداد ناحیه‌ها روی خط جدید است.

نازنین: به نظر می‌رسد تعداد ناحیه‌هایی که نقاط روی خط به وجود می‌آورند، در این‌جا بسیار مهم است.

الهه: آیا این الگو در حالت n خط در صفحه درست است؟

الهام: وقتی n خط در صفحه وجود داشته باشد و ما خط جدید را رسم کنیم، این خط همه‌ی n خط قبلی را قطع می‌کند؛ بنابراین، روی خودش n نقطه مشخص می‌شود و تعداد ناحیه‌هایش $n+1$ است.



مسئله‌ی ۱۰: آیا استدلال الهام کامل است؟

نازنین: ما می‌توانیم یک فرمول برای الگویمان بنویسیم: اگر بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که n خط در صفحه (Plane) ایجاد می‌کنند، با $P(n)$ نشان داده شود، آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$P(n+1) = P(n) + (n+1)$$

الهه: می‌توانیم بنویسیم:

$$P(n+1) = P(n) + L(n)$$

زمان استراحت است، گلستانی و کوهستانی و طبیعت دست‌نخورده‌ای.



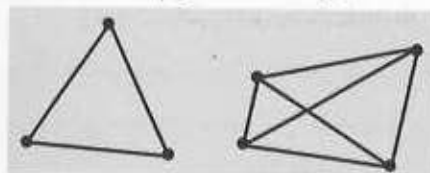
دشت‌هایی چه فراخ! کوه‌هایی چه بلند! در گلستانه چه بوی علفی می‌آمد.



مسئله‌ها

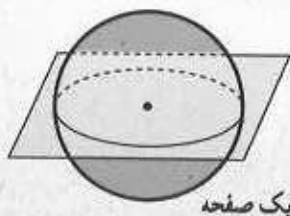
۱. دو فرمول اخیر را توصیف کنید. آیا این فرمول‌ها همواره درست هستند؟
۲. آیا مطمئن هستیم عددی که فرمول‌های (۱) و (۲) به ما می‌دهند، نشان‌دهنده‌ی بیش‌ترین تعداد ناحیه‌های ایجاد شده به وسیله‌ی $n+1$ خط است؟
۳. فرمول تابع P (فرمول (۱))، یک رابطه‌ی بازگشتی نامیده می‌شود؛ زیرا محاسبه‌ی P به ازای یک عدد K به مقدار P در $K-1$ مربوط است. به طور دقیق‌تر، در سمت چپ رابطه‌ی $P(n+1) = P(n) + (n+1)$ مقدار $P(n)$ (مقدار تابع در یک واحد کم‌تر از $n+1$) و عدد $n+1$ ظاهر شده است؛ بنابراین، محاسبه‌ی $P(n+1)$ فقط به مقدار n و $P(n)$ وابسته است. آیا می‌توانید رابطه‌ی دیگری برای P بیابید که بازگشتی نباشد؟ آزمایش کنید.
۴. در جدول اطلاعات و پیشنهادهای گروه هاجر، پیشنهادهای دیگری برای بررسی مسئله ارائه شده است. آن‌ها را بررسی کنید. آیا در بین پیشنهادها، روش دیگری برای حل این مسئله وجود ندارد؟

فراموش نکنید هنوز مسئله‌ی اصلی را حل نکرده‌ایم، اما موفقیت‌های درخشانی به دست آورده و چیزهای زیادی یاد گرفته‌ایم. پیشنهاد ما این است که پیش از این که بررسی مسئله را ادامه دهید، توانایی‌های خود را بیازمایید. با مسئله‌های زیر دست و پنجه نرم کنید و راهبردهای حل مسئله و روش‌هایی را که در حل مسئله به کار گرفتیم، در مورد مسئله‌های جدید محک بزنیم.



سه نقطه

چهار نقطه

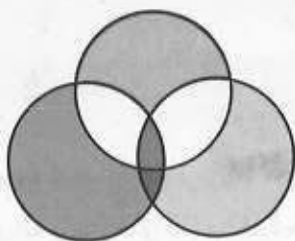


یک صفحه

۵. هزار نقطه روی یک صفحه مشخص شده است. هیچ سه‌تایی از این نقطه‌ها روی یک خط راست قرار ندارند. چند پاره خط باید رسم کنیم تا تمام نقاط دو به دو به هم وصل شوند؟

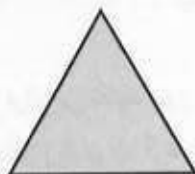
۶. پنج صفحه که همگی از مرکز یک کره می‌گذرند و سطح این کره را قطع می‌کنند، چند ناحیه روی کره به وجود می‌آورند؟ اگر بیش از یک عدد برای پاسخ وجود دارد، بزرگ‌ترین عدد را پیدا کنید.

۷. ۱۰ دایره در صفحه رسم کنید. این دایره‌ها صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟ اگر بیش از یک عدد به دست می‌آید، بزرگ‌ترین عدد را پیدا کنید.

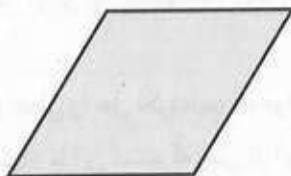


سه دایره

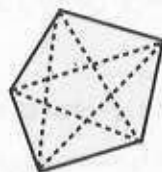
۸. یک مثلث از سه قطعه چوب ساخته شده است، به طوری که تغییر شکل نمی‌دهد. اگر با همین روش یک مربع ساخته شود، شکل تحت فشار تغییر حالت می‌دهد و به یک متوازی‌الاضلاع تبدیل می‌شود. برای جلوگیری از تغییر شکل مربع می‌توان از یک بست قطری شکل استفاده کرد، به طوری که بین دو رأس مقابل حایل شود. از این روش برای ساختن چند ضلعی با چوب استفاده می‌کنند تا مانع تغییر شکل چند ضلعی شوند. یک ده ضلعی چند قطر دارد؟ برای اینکه ده ضلعی تغییر حالت ندهد، به چند بست نیاز است؟ یک n ضلعی چه طور؟



مثلث صلب

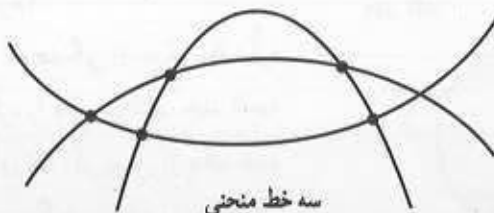


مربع تغییر شکل داده شده



قطرهای پنج ضلعی

۹. ۱۰ منحنی روی یک صفحه طوری رسم شده‌اند که هر خط منحنی هر یک از خط‌های دیگر را دقیقاً در دو نقطه قطع می‌کند. در مجموع چند نقطه‌ی تقاطع به دست می‌آید؟ چند ناحیه توسط این خط‌های منحنی در صفحه پدید می‌آید؟ در حالت n خط چه طور؟ آیا الگویی می‌توان یافت؟



سه خط منحنی



۵-۵- بازنگری و ساماندهی اطلاعات (داده‌ها)

زمان آن رسیده است که از حرکت در فرآیند حل مسئله باز بایستیم و به تماشا بنشینیم! تماشای چه چیزی؟ تماشای خودمان! تماشای فرآیند حل مسئله که در حال انجام دادن آن هستیم، تماشای فرآیند اندیشیدن خودمان! آیا می‌توان فکر کردن را تماشا کرد؟ ابتدا سعی کنید به‌طور ذهنی فرآیند حل مسئله‌ی پنج صفحه در فضا را مرور کنید. پس از آن یک‌بار بحث را مطالعه کنید. نکته‌های راهگشا، مشکلاتی که مانع پیشرفت بودند، راهبردهایی که آن‌ها را به‌کار گرفتیم و به ما کمک کردند، جاهایی که هوشمندانه فکر کردیم و جاهایی که نمی‌توانستیم در حل مسئله به پیش برویم، ... گویی دادگاهی تشکیل داده‌ایم که قاضی و متهم خودمان هستیم!

پس از این تماشا کردن‌ها، نوبت به مرتب کردن اطلاعات به‌دست آمده می‌رسد. شاید راهبردهای تنظیم جدول نظام‌دار، الگویی و ... کارساز باشند. اگر چه در ادامه‌ی حل مسئله گروه‌های دیگری از دانش‌آموزان توانستند موفقیت‌های خوبی به‌دست آورند، با این حال در ادامه‌ی کار به بررسی مسیر فعالیت فکری دو گروه نور و هاجر می‌پردازیم. شیرین فرآیند فکری گروه نور را در ادامه‌ی حل مسئله پنج صفحه در فضا به‌صورت زیر تشریح کرد:

ما پس از بحث کوتاهی به این نتیجه رسیدیم که اطلاعات به‌دست آمده را مرتب کنیم و بعد از آن

کار را ادامه دهیم. هر کدام یک جدول تنظیم کردیم. ملیحه اطلاعات مربوط به ناحیه‌هایی را که نقطه‌ها روی خط ایجاد می‌کنند، مرتب کرد.

تعداد نقطه‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد ناحیه‌ها روی خط	۱	۲	۳	۴	۵	...	n+۱

قانون الگو: $L(n) = n+۱$

من اطلاعات مربوط به خط‌ها در صفحه را مرتب کردم. جدول زیر به دست آمد:

تعداد خط‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد ناحیه‌ها در صفحه	۱	۲	۴	۷	۱۱	...	$P(n) = ?$

قانون الگو: $P(n) = P(n-۱) + n$

قانون الگو با کمک قانون مربوط به نقطه‌ها روی خط: $P(n) = P(n-۱) + L(n-۱)$

در این جا متوجه شدم که براساس قانون دوم، محاسبه‌ی تعداد ناحیه‌هایی که توسط خط‌ها در صفحه به وجود می‌آید، به قانون الگوی نقطه‌ها روی خط وابسته است. البته لحظاتی بعد متوجه شدم که گروه هاجر این مطلب را توضیح داده بود. به نظرم رسید که این دو جدول را باید در یک جدول بزرگ‌تر تنظیم کنیم.

فرشته جدول زیر را تشکیل داده بود.

تعداد صفحه‌ها	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد ناحیه‌ها در فضا	۱	۲	۴	۸	?	...	?

داشتم می‌گفتم که ما باید جدول‌ها را به یک جدول که همه‌ی اطلاعات را در برداشته باشد تبدیل کنیم که فرشته گفت: فهمیدم، من یک الگو می‌بینم، از او خواستیم الگویش را توضیح بدهد و او یک ردیف دیگر به جدولش اضافه کرد:

تعداد صفحه‌ها	۰	۱	۲	۳	...	n
تعداد ناحیه‌ها در فضا	۱	۲	۴	۸	...	?
	$۲^۰$	$۲^۱$	$۲^۲$	$۲^۳$	...	۲^n

من گفتم: مثل این که مسئله حل شد. ما می‌توانیم قانون الگو را به زبان ریاضی هم بنویسیم.

بعد من قانون زیر را نوشتیم.

$S(n) = 2^n$: تعداد ناحیه‌هایی که n صفحه در فضا ایجاد می‌کنند.

فرشته پرسید: چرا حرف S را انتخاب کردی؟ گفتیم: مهم نیست چه حرفی را انتخاب کنیم. فقط می‌خواستم مشابه $L(n)$ و $P(n)$ عمل کنم؛ زیرا فضا در انگلیسی Space می‌شود و من حرف اول آن را انتخاب کردم. در این جا ملیحه بسیار هوشمندانه گفت: ما فقط در حالت‌های ۰، ۱، ۲ و ۳ صفحه در فضا می‌دانیم که این قانون درست است و استدلالی برای این که قانون ما در حالت‌های دیگر درست است، ارائه نکرده‌ایم. این فقط یک حدس علمی است. بهتر است آن را به جدول حدس‌هایمان که از ابتدای مسئله ساخته‌ایم، اضافه کنیم.

فرشته گفت: اما چگونه می‌توانیم حدسمان را ثابت کنیم؟

ملیحه پاسخ داد: صبر کن در مورد چهار صفحه در فضا آزمایش کنیم، بعد به فکر استدلال در حالت کلی باشیم.

پس از اندکی بحث به این نتیجه رسیدیم که شکل رسم کنیم و تعداد ناحیه‌ها را بشماریم اما رسم چهار صفحه در فضا کار ساده‌ای نبود. در همین فکرها بودیم که نگاه من در گوشه کلاس به تابلوی احجام افلاطونی افتاد که یکی از بچه‌ها تهیه کرده بود. ناگهان به یادم افتاد که می‌توانیم برای سه صفحه در فضا از گوشه‌ی کلاس که از دو دیوار و کف کلاس به وجود می‌آید، استفاده کنیم. به فرشته و ملیحه گفتیم که اگر آن تابلو را امتداد دهیم، صفحه‌ی چهارم تشکیل می‌شود.

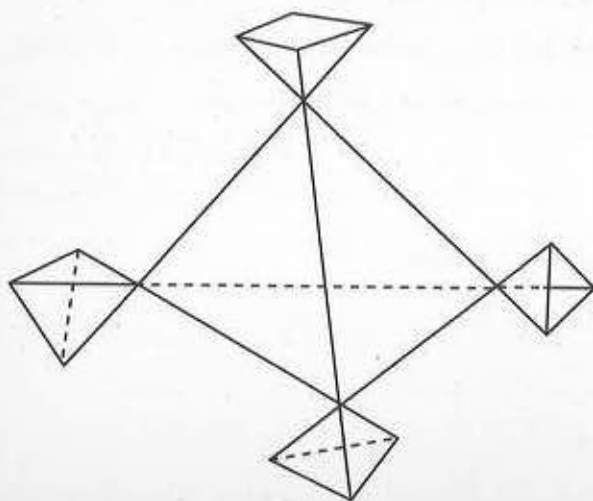
به‌طور ذهنی هر کدام جداگانه ناحیه‌ها را می‌شمردیم و عددهای مختلف به دست می‌آمد. نتوانستیم تعداد ناحیه‌ها را درست بشمریم. شکل خوبی هم نتوانستیم رسم کنیم. در این جا فرشته گفت ما قبلاً با

مقوا شکل‌های فضایی و چند وجهی می‌ساختیم. بهتر است یک مدل از چهار صفحه در فضا شبیه گوشه کلاس و تابلو بسازیم.

ما یک مدل ساختیم شبیه شکل روبه‌رو شد.

ناحیه‌ها را شمردیم، ۱۵ تا بود! حدس ما تأیید نشد. باید $S(4) = 2^4 = 16$ می‌شد.

فرصت فراهم شده بود.



پیشنهادم را که ناتمام مانده بود، مطرح کردم: ما باید یک جدول بسازیم که همه‌ی اطلاعات سه جدول را در برداشته باشند. یک ستون برای تعداد اشیا (نقطه‌ها، خط‌ها و صفحه‌ها)، یک ستون برای تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی نقطه‌ها روی خط ایجاد می‌شود، دو ستون مشابه دیگر هم برای خط‌ها در صفحه و صفحه‌ها در فضا.

تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی صفحه‌ها در فضا به وجود می‌آید.	تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی خط‌ها در صفحه ایجاد می‌شود.	تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی نقطه‌ها روی خط پدید می‌آید.	تعداد اشیا
۱	۱	۱	۰
۲	۲	۲	۱
۴	۴	۳	۲
۸	۷	۴	۳
?	۱۱	۵	۴
		۶	۵
⋮	⋮	⋮	⋮
$S(n)=?$	$P(n)$	$L(n)=n+1$	n

$$(*) P(n) = P(n-1) + L(n-1)$$

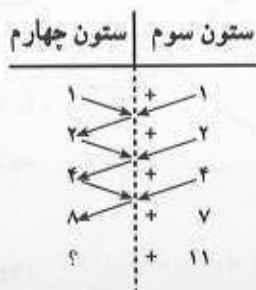
جدول جالبی شد. همه‌ی این اطلاعات قبلاً به دست آمده بود و ما چیزی به آن اضافه نکرده بودیم. فقط نماد $S(n)$ را ما در نظر گرفتیم. وقتی با پیکان‌ها (فلش‌ها) در ستون دوم و سوم جدول رابطه‌ی «*» را نمایش دادیم، خیلی کمک کرد. زیاد روی جدول تمرکز نکرده بودیم که ملیحه گفت: الگویی می‌بینم. در ستون سوم و چهارم هم قانونی شبیه ستون‌های دوم و سوم وجود دارد! اجازه بدهید یک‌بار با هم آزمایش کنیم.

$$1+1=2$$

$$2+2=4$$

$$4+4=8$$

?





با این قانون برای چهار صفحه در فضا، باید داشته باشیم :

$$8+7=15$$

یعنی، در حالت چهار صفحه در فضا حداکثر ۱۵ ناحیه پدید می‌آید.

فرشته گفت : درست است ؛ زیرا مدلی که برای چهار صفحه در فضا ساختیم! ۱۵ ناحیه

به وجود می‌آورد. آیا می‌توانیم این قانون را به زبان ریاضی بنویسیم؟

$$S(n+1) = S(n) + P(n) \quad \text{من (شیرین) پاسخ دادم : این خیلی واضح است.}$$

فرشته : پس کار تمام است.

ملیحه : تند نرو! قبلاً هم مانند پول شمردن ریاضی دان! عمل کردیم و اشتباه از آب درآمد. این

فقط یک حدس علمی است. بهتر است آن را به جدول حدس‌ها اضافه کنیم.

من پیشنهاد کردم که این قانون را برای پنج صفحه آزمایش کنیم. فرشته گفت : چگونه؟ ساختن

یک مدل برای چهار صفحه هم سخت بود، برای پنج صفحه که ایده‌ای هم نداریم، کار سخت‌تر است.

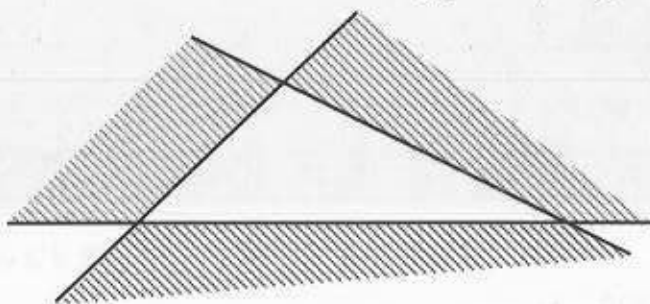
ملیحه : حتی اگر الگوی ما برای ۵ صفحه هم درست باشد، نمی‌توانیم مطمئن باشیم برای ۶ یا

۷ و یا ... درست باشد. فکر می‌کنم باید دیدگاهمان را نسبت به مسئله تغییر دهیم. یک جور دیگر

به مسئله نگاه کنیم. شاید در درس‌های گذشته ایده‌هایی باشند که به ما کمک کنند یا حتی راهبردهای

دیگری.

صحبت‌های ملیحه مرا به فکر فرو بُرد؛ راه‌بردهای دیگر، درس‌های گذشته، ایده‌های دیگر و مانند این‌ها در ذهنم تکرار می‌شد که ایده‌ای مانند یک هدیه‌ی آسمانی (!) به ذهنم رسید. چند ضلعی‌ها، مشابهت‌ها، چند وجهی‌ها و ... بی‌درنگ گفتم: چیزی به نظرم می‌رسد. سه خط در صفحه، مثلث ... چهار صفحه در فضا، چهار وجهی ... چهار وجهی مثلثی مشابه و همتای فضایی مثلث است. فرشته گفت: فهمیدم؛ می‌خواهی بگویی همان‌طور که ما چند ضلعی‌ها ویژگی‌های آن‌ها را به چند وجهی‌ها و خواصشان در فضا تعمیم دادیم، شاید بتوانیم برای ناحیه‌ها نیز همین کار را انجام دهیم. ملیحه ادامه داد: پیشنهاد بدی نیست؛ در واقع، پیشنهاد دیگری نداریم. به آزمودنش می‌ارزد. بیایید شروع کنیم؛ اگر ضلع‌های مثلث را امتداد دهیم، وضعیت سه خط در صفحه که بیش‌ترین تعداد ناحیه‌ها را ایجاد می‌کند، به‌دست می‌آید.



برای هر رأس یک ناحیه داریم (۳ ناحیه)، برای هر ضلع هم یک ناحیه (۳ ناحیه) و یک ناحیه هم در درون مثلث؛ روی هم، تعداد ناحیه‌ها برابر است با:

$$3 + 3 + 1 = 7$$

چهار وجهی همتای فضایی مثلث است. چهار وجهی ۴ رأس، ۴ وجه، ۶ یال و ۱ ناحیه درون چهار وجهی دارد؛ بنابراین:

$$4 + 4 + 6 + 1 = 15$$

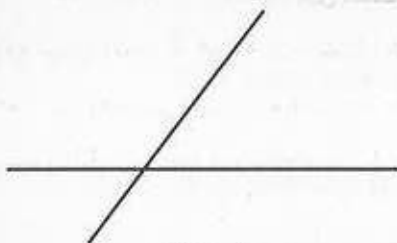
تعجب‌آور و غیرمنتظره بود. عددی که برای تعداد ناحیه‌ها به‌دست آمد، برابر تعداد ناحیه‌های روی مدلی که ساختیم بود!

فرشته گفت: تردید دارم! شبیه «خرگوش از زیر کلاه در آوردن» است! احساس می‌کنم شانسِ درست در آمد. ما هیچ دلیلی ارائه نکردیم؛ فقط تعداد یال‌ها، رأس‌ها، وجه‌ها و یک ناحیه‌ی درون را شمردیم. آیا این استدلال است؟ از کجا معلوم در حالت پنج صفحه، شش صفحه و ... درست باشد؟

مسئله‌ی ۱: آیا این روش استدلال که در آخر بحث گروه نور مطرح شد، درست است؟ آیا این

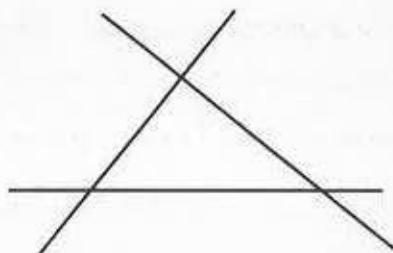
راهکار مسئله را در حالت کلی حل می‌کند؟

مسیر حل مسئله‌ی گروه هاجر به وسیله‌ی نازنین ارائه شد. ما روایت او را بی‌می‌گیریم. نازنین: ما یک روش خوب را با موفقیت اجرا کرده بودیم و اعتقاد داشتیم که همان راهکار در حالت صفحه‌ها در فضا نیز کار می‌کند؛ بنابراین، از ساده‌ترین حالت‌ها شروع کردیم. از کارهایی که گروه نور در بخش اول مسئله‌ی پنج صفحه در فضا انجام داده بود، نیز استفاده کردیم. ما در روش خودمان از دو وضعیت زیر استفاده کرده بودیم:



دو خط متقاطع در صفحه
۴ ناحیه

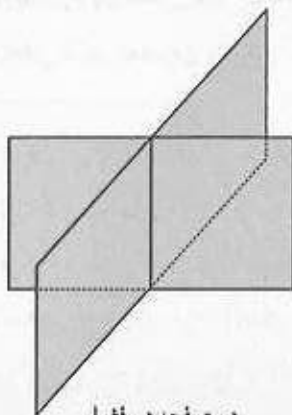
الف



سه خط متقاطع در صفحه (وضعیتی که
مثلث ایجاد می‌شود) ۷ ناحیه

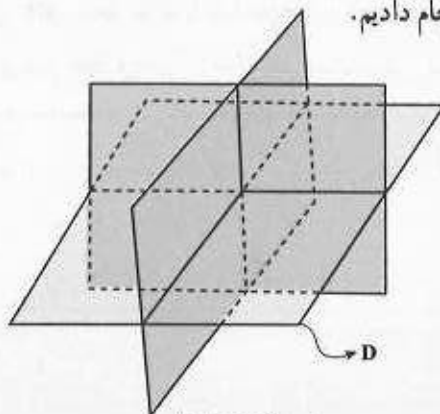
ب

اگر از شکل «ب» یک خط حذف کنیم شکل «الف» و اگر به شکل «الف» یک خط را طوری اضافه کنیم که با هیچ کدام از خط‌های قبلی موازی نباشد و از نقطه‌ی تلاقی دو خط هم نگذرد، آن‌گاه شکل «ب» به دست می‌آید. علاوه بر این، روی خط اضافه‌شده دو نقطه و سه ناحیه پدید می‌آید. در واقع، خط سوم سه تا از ناحیه‌ها را به دو بخش تقسیم می‌کند! ما همین کار را روی صفحه‌ها در فضا انجام دادیم.



دو صفحه در فضا
۴ ناحیه

الف



سه صفحه در فضا
۸ ناحیه

ب

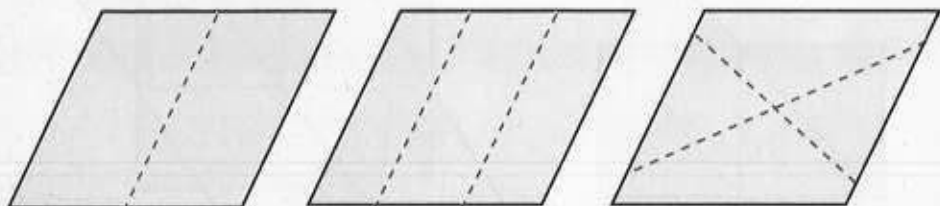
اگر صفحه‌ی D را که افقی است از شکل «ب» برداریم، شکل «الف» به دست می‌آید. اگر بخواهیم یک صفحه به شکل «الف» اضافه کنیم، چند وضعیت ممکن است رخ دهد:

- ۱- صفحه‌ی جدید با یکی از صفحه‌های متقاطع موازی باشد.
- ۲- صفحه‌ی جدید هر دو صفحه را قطع کند ولی فصل مشترک (خط l) دو صفحه متقاطع را قطع نکند.
- ۳- صفحه‌ی جدید دو صفحه‌ی متقاطع و فصل مشترک آنها یعنی خط l را قطع کند.

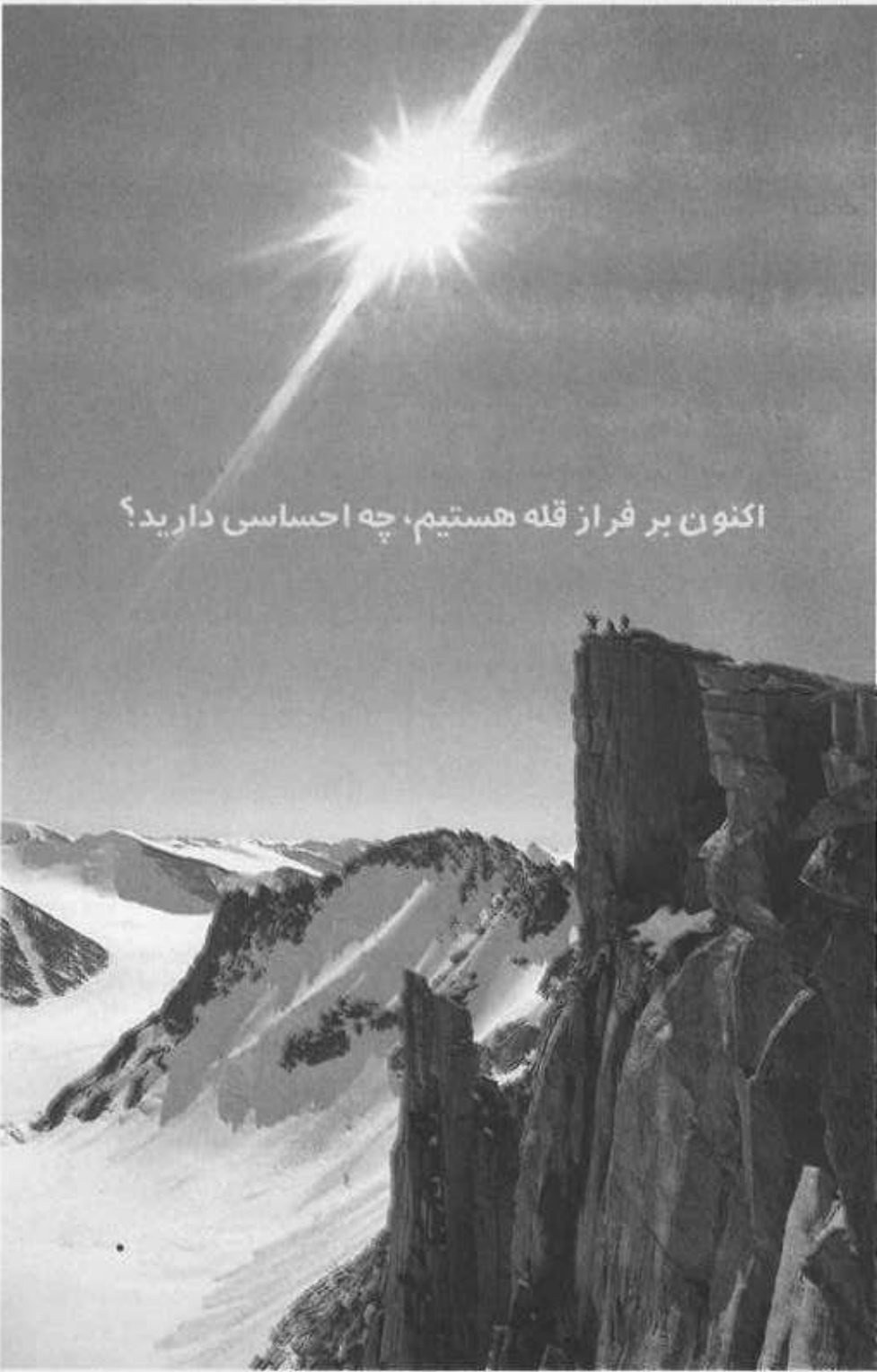
در وضعیت ۱ شش ناحیه، در وضعیت ۲ هفت ناحیه و در وضعیت ۳ هشت ناحیه به وجود می‌آید. دلیل این پاسخ‌ها واضح است.

مسئله‌ی ۲: شکل‌های سه وضعیت ۱، ۲ و ۳ را رسم کرده و پاسخ‌های بالا را بررسی کنید. در واقع در وضعیت ۳، صفحه‌ی جدید همه‌ی ناحیه‌هایی را که دو صفحه در فضا به وجود می‌آورند، قطع می‌کند. ادامه‌ی کار را از زبان اعضای گروه بشنوید؛
 الهام: عجب نکته‌ی جالبی! همان خاصیت خط جدید، نقطه‌ها و ناحیه‌ها روی خط جدید در این جا وجود دارد.

الهه: منظورت را متوجه نمی‌شوم؟ ممکن است واضح‌تر بیان کنی؟
 الهام: در مسئله‌ی خط‌ها در صفحه، ما یک خط جدید اضافه می‌کردیم، اما در این جا یک صفحه‌ی جدید اضافه می‌کنیم. در آن جا محل تلاقی خط جدید با خط‌های قبلی، نقطه بود اما در این جا محل تلاقی صفحه‌ی جدید با صفحه‌های قبلی خط می‌شود. اصلاً بهتر است شکل رسم کنیم.



وضعیت (۱)	وضعیت (۲)	وضعیت (۳)
یک خط روی صفحه‌ی جدید پدید می‌آید	دو خط موازی روی صفحه‌ی جدید پدید می‌آید	دو خط متقاطع روی صفحه‌ی جدید پدید می‌آید
۲ ناحیه روی صفحه‌ی جدید	۳ ناحیه روی صفحه‌ی جدید	۴ ناحیه روی صفحه‌ی جدید



اکنون بر فراز قله هستیم، چه احساسی دارید؟

نازنین: حدس جالبی به ذهنم می‌رسد اما بهتر است یک مرحله‌ی دیگر هم با این روش به پیش برویم.

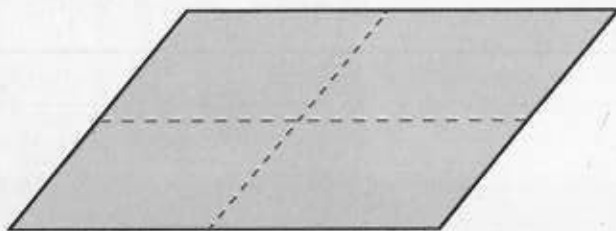
مسئله‌ی ۳: زمان حدس جدید است. سعی کنید براساس همین اطلاعات، حدسی بسازید و به جدول حدس‌هایتان بیفزایید.

الهه: هنوز زود است، بهتر است گام بعدی را برداریم. در مسئله‌ی خط‌ها در صفحه، آخرین وضعیت‌ها را در نظر می‌گرفتیم؛ یعنی، وضعیت‌هایی که بیش‌ترین تعداد ناحیه را تولید می‌کردند؛ بنابراین، برای ادامه‌ی کار باید وضعیت ۳ را در نظر بگیریم. یعنی وضعیتی که در آن، سه صفحه ۸ ناحیه را ایجاد کردند.

نازنین: ما خیلی سریع چیزهای زیادی فهمیدیم. صفحه‌ی جدید - یعنی صفحه‌ی چهارم - را با شکل سه صفحه در فضا در وضعیت ۳ قطع دادیم؛ چند حالت پدید آمد:

- ۱- صفحه‌ی جدید با یکی از سه صفحه موازی بود.
- ۲- صفحه‌ی جدید از محل تلاقی یا فصل مشترک دو تا از صفحه‌ها می‌گذشت.
- ۳- صفحه‌ی جدید با هیچ‌کدام از صفحه‌ها موازی نبود و از محل تلاقی (فصل مشترک) هیچ دو صفحه‌ای عبور نمی‌کرد؛ یعنی، شامل هیچ‌کدام از فصل مشترک‌ها نمی‌شد.

مسئله‌ی ۴: برای هر کدام از وضعیت‌های بالا شکل را رسم کنید. این کار برای تقویت تجسم هندسی شما بسیار مؤثر است. در واقع، تفکر تصویری شما را تقویت می‌کند. تفکر تصویری یکی از مهارت‌های اساسی تفکر ریاضی است. آن را دست‌کم نگیرید. نازنین: روی صفحه‌ی جدید که با سه صفحه در فضا برخورد می‌دادیم این شکل‌ها به دست آمد.



(۱) صفحه‌ی جدید موازی یکی از سه صفحه بود. دو خط متقاطع در صفحه، ۴ ناحیه.

(۲) صفحه‌ی جدید شامل یکی از فصل مشترک‌ها بود؛ این حالت مشابه حالت ۱ می‌شود!
 (۳) صفحه‌ی جدید با هیچ یک از صفحه‌ها موازی نبود و شامل هیچ کدام از فصل مشترک‌ها نیز نباشد.

سه خط متقاطع که یک مثلث و ۷ ناحیه تشکیل می‌دادند.



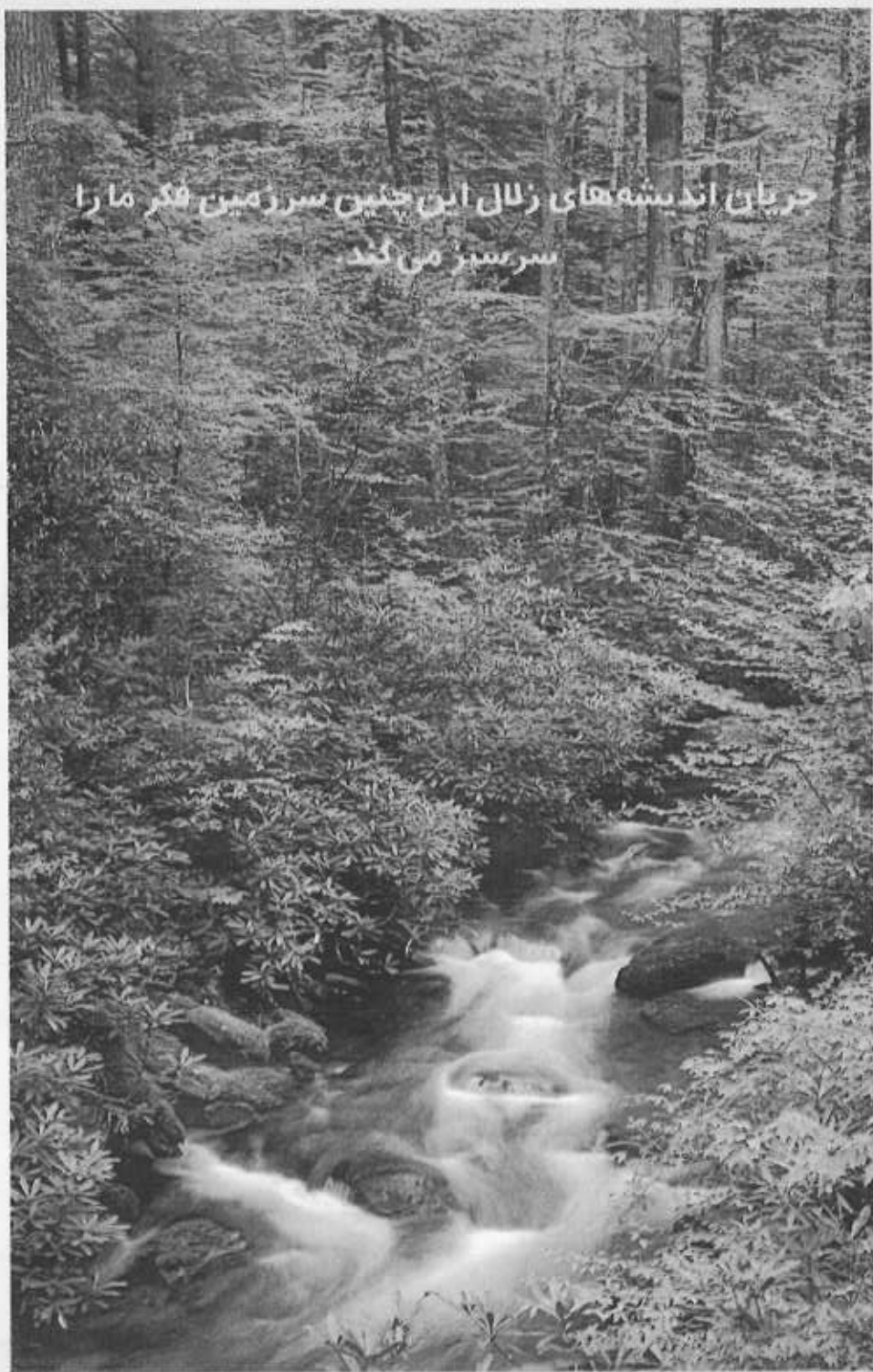
الهام: پس از بررسی این حالت، قانون الگو را در حالت کلی به دست آوردیم. درواقع، قانون الگو کاملاً مشابه قانون الگوی خط‌ها در صفحه بود.
 قانون الگوی ما:

بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی n خط در صفحه پدید می‌آید + بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی n صفحه در فضا پدید می‌آید = بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی که به وسیله‌ی $n+1$ صفحه در فضا پدید می‌آید

$$S(n+1) = S(n) + P(n)$$

الهِه: واقعاً عجیب و باور نکردنی است. همه‌ی آن‌چه که قبلاً انجام داده بودیم، به کار آمد! معجزه است!
 نوبت استراحت است. رودخانه‌ای و جنگل انبوهی و آوای پرندگان.

جریان اندیشه‌های زلال این چنین سرزمین فکر ما را
سرسبز می‌کند.





مسئله‌ها

۱. قانونی را که گروه هاجر کشف کرد به کار بگیرید و بیش‌ترین تعداد ناحیه‌هایی را که صفحه‌ها در فضا به وجود می‌آورند، به ازای $n \leq 10$ محاسبه کنید. آیا مطمئن هستید که عددهای به دست آمده، واقعاً بیش‌ترین تعداد ناحیه‌ها را به شما می‌دهد؟

۲. چگونه می‌توان مطمئن شد که قانون گروه هاجر واقعاً برای هر $n \geq 1$ درست است؟ آیا گروه هاجر برای این قانون استدلالی ارائه کرد؟ آیا بحث‌های مربوط به آن استدلال دقیق است؟

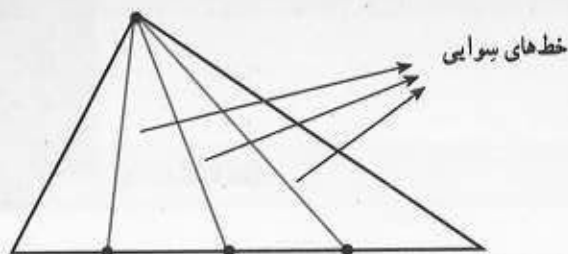
۳. فرض کنید تابع $F(n)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} F(n) = F(n-1) + P(n-1) ; n \geq 1 \\ F(0) = 1 \end{cases}$$

تابع $P(n)$ همان قانون الگوی خط‌ها در صفحه است. $F(n)$ یک رابطه‌ی بازگشتی است. یک رابطه‌ی جایگزین برای $F(n)$ بیابید که بازگشتی نباشد. می‌توانید از رابطه‌ی غیربازگشتی که برای $P(n)$ پیدا شده است، استفاده کنید.

۴. در بررسی مسئله‌ی پنج صفحه در فضا، ما تصمیم گرفتیم مسئله‌ی اصلی را به حالتی محدود کنیم که بیش‌ترین تعداد ناحیه‌های ایجاد شده را نشان دهد. اکنون فرض کنید بخواهیم تمام وضعیت‌های ممکن برای پنج صفحه در فضا را بررسی کنیم و تعداد ناحیه‌ها را در هر وضعیت به دست آوریم. تلاش کنید الگوهای پیدا کنید تا تعداد ناحیه‌ها را در هر وضعیت به ما بدهد. آیا می‌توان مسئله را در حالت کلی حل کرد؟

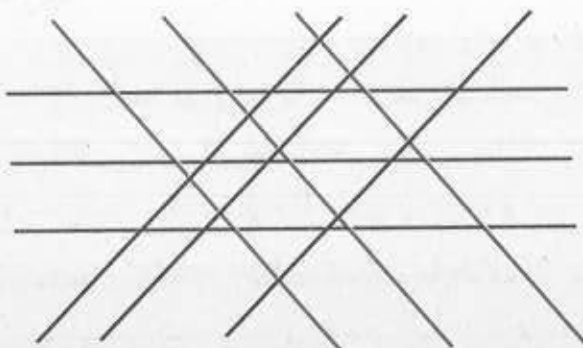
خط‌های سیوایی: یک خط سیوایی در یک مثلث، خطی است که از یک رأس مثلث و یک نقطه غیر رأس از ضلع مقابل می‌گذرد. این خط به افتخار جیووانی سیوا (۱۷۳۶-۱۶۴۷)، هندسه‌دان ایتالیایی نامگذاری شده است. او قضیه‌ای در باب این خط‌ها اثبات کرده است. از آن‌جا که پاره خط داخل مثلث از هر خط سیوایی موردنظر است قسمت‌های خارج مثلث هر خط سیوایی را حذف می‌کنیم.



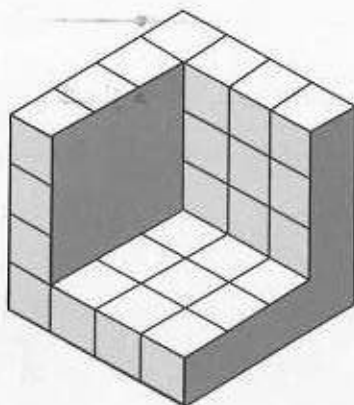
۵. خط‌های سیوایی: فرض کنید از هر رأس مثلث n خط سیوایی رسم شده است که هیچ سه‌تایی آن‌ها یکدیگر را در داخل مثلث قطع نمی‌کنند. این $3n$ خط درون مثلث را به چند ناحیه مجزا تقسیم می‌کنند؟

این مسئله فرصتی بسیار عالی برای به‌کارگیری راهبردهای حل مسئله فراهم می‌کند. رویکردهایی که در این فصل به‌کارگرفته شد را فراموش نکنید! چند راه‌حل متفاوت می‌توانید برای این مسئله کشف کنید. این مسئله یک راه‌حل ابتکاری کلاس پنجمی (دبستانی) نیز دارد! چه تعمیم یا تعمیم‌هایی برای این مسئله وجود دارد؟ آن‌ها را بررسی کنید.

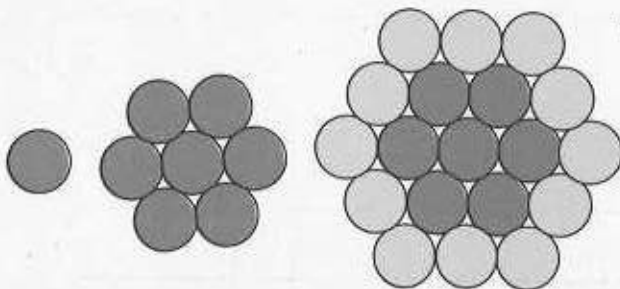
۶. خط‌های موازی: فرض کنید سه دسته خط موازی (هر دسته n خط) رسم شده است طوری که شیب هر دسته خط با دسته‌ی دیگر تفاوت دارد و هیچ سه خطی یکدیگر را در یک نقطه قطع نمی‌کنند. این $3n$ خط صفحه را به چند ناحیه مجزا تقسیم می‌کنند؟ چه تعمیم یا تعمیم‌هایی برای مسئله‌ی خط‌های موازی وجود دارد؟ آن‌ها را بررسی کنید.



۷. کُنج مکعبی: مکعب‌های واحد، دو دیوار و کف یک اتاق به ابعاد $n \times n \times n$ را چنان که در شکل زیر نشان داده شده است، می‌سازند. چند مکعب لازم است؟ این مسئله با اتحاد جبری $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ چه ارتباطی دارد؟ آن را توصیف کنید. چه تعمیم یا تعمیم‌هایی برای مسئله‌ی کُنج مکعبی وجود دارد؟ آن‌ها را بررسی کنید.

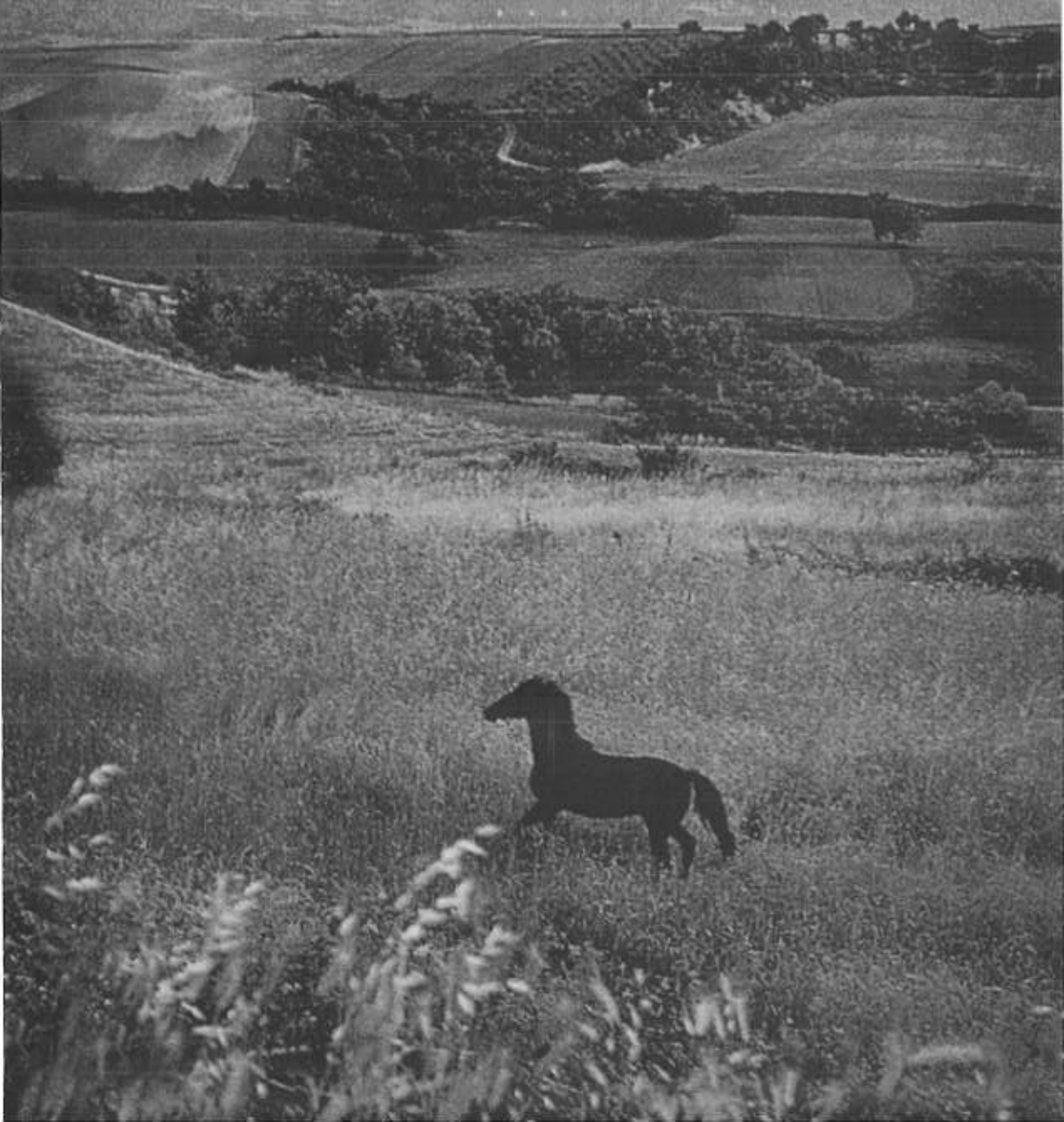


۸. عددهای شش‌گانی: برای حفظ انعطاف‌پذیری، کابل‌های الکتریکی ولتاژ بالا که از چندین رشته سیم سنگین ساخته می‌شوند آن‌ها را به دور یک رشته مرکزی می‌پیچند. شکل زیر چند مقطع عرضی آن‌ها را نشان می‌دهد. در چنین کابلی چند رشته سیم می‌تواند جا بگیرد؟ یک پیمانکار برق، می‌تواند کابل‌هایی با مقاطع عرضی نشان داده شده در شکل زیر تهیه کند. رشته‌ها دایره‌ای نیستند بلکه طوری اصلاح شده‌اند که فضای بین قرص‌ها پر شود. یک لایه‌ی روپوش لاستیکی، سطح گرد بیرونی را می‌پوشاند.



چه تعمیم یا تعمیم‌هایی برای این مسئله وجود دارد؟ آن‌ها را بررسی کنید. پس از اینکه مسئله‌های این بخش را حل کردید راه‌حل‌های مسئله‌های ۵، ۶، ۷ و ۸ را کنار هم بگذارید و آن‌ها را دوباره بررسی کنید. آیا نکته‌ی جدیدی وجود دارد؟ هر تحلیل یا حدسی به نظر تان می‌رسد بیان کنید!

به حسن و خلق و وفا کس به یار ما نرسد



پیرامون پژوهش در ریاضیات

در ریاضیات، دانستن یعنی انجام دادن! بنابراین روش یادگیری ریاضی متکی بر انجام دادن به وسیلهی دانش آموز است. یادگیری ریاضی مانند یادگیری شنا است. هر چه بیشتر شناخته شود، بیشتر می‌توانیم از آن استفاده کنیم. بنابراین باید دست به عمل بزنیم و وارد آب شویم. شاید بارها به وضوح و در دسترس بیفتیم، رفته رفته به دریا می‌رسیم. صرفاً با خواندن کارهای دیگران نمی‌توان کار نو [در ریاضی] انجام داد. خلاقیت و کشف باید در قلب آموزش ریاضیات باشد و از مندرج به بیرون شود.

هدف از کار پژوهشی ریاضی در مدرسه، تحقیق در مَرزهای ریاضی نیست، بلکه حل هر مسئله‌ای ناشی از غیر سرراست به وسیلهی یک دانش آموز یک کار نو است. حل یک مسئله ریاضی، مانند هر مرحله‌ای از یادگیری، مرحله‌ای است که در آن یک مسئله ریاضی در روشی نوین حل می‌گردد. و این مسئله، همان مسئله‌ای است که پژوهش در ریاضیات است. بنابراین، در این فصل به طور خلاصه نکاتی پیرامون روش پژوهش در ریاضیات مطرح می‌کنیم. به ویژه در مورد سه مرحله‌ی پژوهش، از آنکه کردن یک کار پژوهشی مطالبی را می‌توانیم در پایان یک مطالعه پیدا کنیم.

۱- چگونه یک پژوهش را آغاز کنیم؟

پژوهش در ریاضیات، همان کاری است که دانش‌آموزان در کلاس‌های ریاضی انجام می‌دهند. اما در اینجا، پژوهش در ریاضیات به معنای کارهای پژوهشی است که دانش‌آموزان در کلاس‌های ریاضی انجام می‌دهند. این کارها می‌تواند به صورت فردی یا گروه‌ای انجام شود. در این بخش، به روش‌های مختلف پژوهش در ریاضیات می‌پردازیم.

- مسئله‌ها را به روش‌های مختلف حل کنید. این کار می‌تواند به صورت فردی یا گروه‌ای انجام شود.
- به روش‌های مختلف به یک مسئله رسیدن. این کار می‌تواند به صورت فردی یا گروه‌ای انجام شود.
- اطلاعاتی را در مورد یک مسئله جمع‌آوری کنید. این کار می‌تواند به صورت فردی یا گروه‌ای انجام شود.
- به روش‌های مختلف به یک مسئله رسیدن. این کار می‌تواند به صورت فردی یا گروه‌ای انجام شود.

را یاری کند؟ چند مثال خاص را بررسی کنید؛ شما را در الگویابی کمک خواهند کرد.

- برای حمله به مسئله مدلی بسازید و سعی کنید توسط آن مدل به حل مسئله نزدیک تر شوید.
- یافته‌های خود را که پاسخ ناقص مسئله یا پاسخی برای مسئله‌ای نزدیک به مسئله است مرتب کنید. اگر هنوز راه‌حلی برای مسئله به نظر شما نمی‌رسد، با این اطلاعات دوباره به مرحله‌ی اول بازگردید و سؤال فعالیت را در حالت‌های خاص‌تر یا کلی‌تر که با توجه به اطلاعات جدید به نظرتان می‌رسد، بررسی کنید. مرحله‌ی فهمیدن مسئله باید چندین بار طی شود؛ در واقع شما برای فهمیدن مسئله باید چندین بار به آن مراجعه کنید.

- اگر به حل مسئله دست یافته‌اید، سعی کنید استدلالی منظم برای رسیدن به پاسخ طرح‌ریزی کنید.

کُشتی گرفتن با ایده‌ها، ساختن مثال‌های زیبا، مدلسازی برای بهتر فهماندن مطالب و روش‌های نو برای در کنار هم قراردادن مطالب اغلب اثبات‌های جدید یا افق‌های روشن‌تری را پیش‌روی ما می‌گذارد. حتی اگر مسئله‌ی پژوهش شما تازه نباشد، حتماً برای خود و بسیاری از دوستانتان تازه است. پس از این که از یافته‌های پژوهش خود راضی شدید باید به روشی مناسب آن را در اختیار دوستانتان قرار دهید.

۶-۲- چگونه پژوهش را ارائه کنیم؟

اگر پژوهش شما در مورد یک موضوع توصیفی است، به ناچار باید به مطالعه‌ی منابع مختلف بپردازید. با صبر و حوصله مطالعه کنید و بکوشید مطالب را به خوبی هضم کنید؛ به‌طوری که بتوانید آن‌ها را به‌خوبی توضیح دهید. سعی کنید با توجه به دیدگاهی که سؤال فعالیت مطرح می‌کند، مطالب را به روشی جدید به هم پیوند بزنید. در مراحل مختلف نوشتن، همواره مراقب ذهن خواننده‌ای که نوشته‌های شما را دنبال می‌کند، باشید.

مرحله‌ی نهایی انجام پژوهش، مرحله‌ی معرفی و ارائه‌ی آن به دوستان است. مسئله‌ی موردنظر و چالش‌های آن را باید چنان مطرح کرد که توجه و علاقه‌ی خوانندگان را جلب کند و سپس خواننده را به همراه خود به دنیای زیبای اکتشاف ریاضی بیاورد و در پایان، نتایج را چنان ارائه دهد که قدردانی خواننده را برانگیزد. برای دست‌یافتن به این هدف نویسنده ناچار است روند حل مسئله را با حک و اصلاح چنان جلوه دهد که ممکن است با روش اولیه‌ی حل مسئله توسط نویسنده بسیار متفاوت باشد؛ بنابراین در مرحله‌ی ارائه‌ی کتبی و شفاهی پژوهش همه‌ی مراحل تکمیل پژوهش تحت تأثیر قرار می‌گیرند. یکی از روش‌های ارائه‌ی کتبی پژوهش، روش ارائه‌ی خلاصه‌ی مقاله است.

خلاصه‌ی مقاله‌ی شما باید شامل قسمت‌های زیر باشد :

معرفی مسئله‌ای که به آن پاسخ می‌دهید، نقشه‌ی حمله‌ی شما به مسئله، ایده‌هایی که از آن‌ها استفاده کرده یا به وجود آورده‌اید، و خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده. شایسته است به هریک از موارد بالا یک بند (پاراگراف) اختصاص دهید.

ارائه‌ی شفاهی پژوهش نیز این فرصت را به شما می‌دهد که در عین ارائه‌ی نتایج پژوهش، به نکات اساسی پژوهش و جنبه‌های مهم آن اشاره کنید. در ارائه‌ی شفاهی باید به ایده‌های اصلی پژوهش، نکات جالب، کاربردهای آن در زندگی روزمره، یا پژوهش‌هایی که از حاصل پژوهش شما تغذیه می‌شود، اشاره کنید.

برای کمک کردن به شنوندگان جهت درک بهتر مطالب، ارائه‌ی خلاصه‌ای از روش تحقیق پژوهش لازم است.

هم‌چنین، معرفی جنبه‌هایی از راه‌حل که شنوندگان آن را به آسانی بفهمند و بتوانند مسئله‌ی پژوهش را با مسائلی که شنیده‌اند، ارتباط دهند. به علاوه نشان دادن اهمیت مسئله به شما در برقراری ارتباط با شنوندگان کمک می‌کند. باید بین ارائه‌ی قسمت‌های ساده و مشکل پژوهش تعادل ایجاد کنید؛ به طوری که هم شنوندگان خسته نشوند و پیوسته به شما توجه داشته باشند و هم نکات مهم پژوهش را دریابند و مورد توجه قرار دهند. به شنوندگان اجازه دهید در صورت تمایل به بیش‌تر دانستن در هر مورد، از شما سؤال کنند. اگر بتوانید شنوندگان را درگیر کنید، ارائه‌ی شفاهی شما بسیار موفق‌تر خواهد بود.

ارائه‌ی شفاهی خود را از پیش برنامه‌ریزی، زمان‌بندی و سپس تمرین کنید.

روش دیگر ارائه‌ی پژوهش، نوشتن مقاله است. هدف مقاله توصیف کامل نتایج به دست آمده است، همه‌ی ایده‌ها، فرآیندها و قضایایی که در پژوهش از آن‌ها استفاده کرده‌اید، باید در مقاله گنجانده شود. اثبات قضایا و توضیحاتی که لزوم به کار بردن ایده‌ها و فرآیندها را توجیه می‌کنند نیز باید ضمیمه شود. شما می‌توانید در مقاله‌ی خود توضیحات را به شکل مبسوط ارائه کنید؛ در صورتی که در ارائه‌ی شفاهی یا خلاصه‌ی مقاله چنین امکانی نیست. مطمئن شوید که خواننده سؤال پژوهش را به خوبی دریافته است. روش حل مسئله و چند مثال مهم را نیز به تفصیل بیان کنید. فهرست منابع خود را شماره‌گذاری کنید و در آخر مقاله بیاورید. در هر مرحله که به منابع ارجاع می‌دهید، شماره‌ی منبع را در متن مقاله بیاورید. قضایا، گزاره‌ها، تعاریف، بخش‌ها، زیربخش‌ها و فرمول‌ها را شماره‌گذاری کنید تا بتوانید خواننده را به سادگی به آن‌ها ارجاع دهید. در ادامه دو نوع چارچوب برای نوشتن یک مقاله‌ی ریاضی ارائه می‌کنیم.

هر سپیده دم خورشید که بر آید، اول تو به دیدارش می روی،
تو آخرین کسی هستی که او را بدرقه می کنی،
شبانگاهان، تو در مهتاب رؤیایی هستی،
این ها همه نشانه است.

نام پژوهش
نام پژوهشگران

چکیده. معرفی مسئله‌ی مورد مطالعه پژوهش و دیدگاه مقاله در مورد حل آن به طور خلاصه در یک بند.

مقدمه. شامل شرح مبسوط صورت مسئله همراه با مواردی که در خلاصه‌ی مقاله ذکر شده است و در پایان، تشکر از افراد و مؤسساتی که به انجام پژوهش کمک کرده‌اند.

فصل‌بندی مقاله. فصل اول. پیش نیازهای علمی برای درک پژوهش به طور خلاصه با ذکر دقیق منابع مناسب. اگر حجم این فصل کم است، آن را در یک بند خلاصه کنید و در قسمت مقدمه قرار دهید و نام مقدمه را به «مقدمه و پیش نیازها» تغییر دهید.

:

مطالب را در چند فصل تنظیم کنید و اثبات نهایی قضایای اصلی پژوهش و جمع‌بندی نتایج پژوهش را در فصل آخر قرار دهید. طراحی و تقسیم مطالب به قضایا، گزاردها و فصول، در گرو توانایی خاصی است که از طریق تجربه کردن در مقاله‌نویسی به دست می‌آید.

فهرست منابع. در پایان، فهرست منابع را با ذکر نشانی دقیق آن‌ها و انتشاراتی که منابع را به چاپ رسانده است، آورده می‌شود.



راه آسمانی شدن را نشان می‌دهد. باید ملکوتی شد

باید که جمله جان شوی تا لایق جانان شوی

نام پژوهش

نام پژوهشگران

مقدمه. ابتدا هدف پژوهش و پیشینه‌ی تاریخی همراه با چند منبع مهم مورد استفاده بیان می‌شود و سپس معرفی مسئله و شفاف کردن ارتباط آن با مسائل دیگر انجام می‌گیرد. بررسی چند مثال ساده و تعیین‌کننده به‌طوری که پیچیدگی‌های مسئله را بهتر روشن کند و اشاره به تغییراتی که جهت ارائه‌ی بهتر مطلب در نظر گرفته شده، بخش انتهایی مقدمه است.

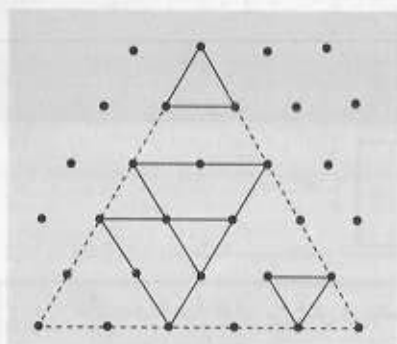
فصل‌بندی مقاله. بیش نیازهای مبحث مورد نظر در یک فصل به‌طور موضوعی مرتب می‌شوند. به‌علاوه ذکر منابع مهم برای مراجعه کردن و مثال‌های روشن‌کننده آورده می‌شوند. در فصل‌های بعدی راه حلی که برای مسئله یا مسائل موضوع پژوهش همراه با اثبات دقیق آنها به روشی که برای خواننده آسان باشد، ارائه می‌شود. در پایان نتیجه‌گیری‌ها بیان می‌شوند.

فهرست منابع. در پایان، فهرست منابع را با ذکر نشانی دقیق آن‌ها و انتشاراتی که منابع را به‌چاپ رسانده است، آورده می‌شود.



۶-۳- پروژه های کوچک

۱- در یک مثلث ۱۰۰ لایه ای متساوی الاضلاع که بر یک شبکه ی مثلثی شکل تشکیل شده است، می توان تعداد زیادی مثلث متساوی الاضلاع واحد تشکیل داد. شما هم چنین می توانید



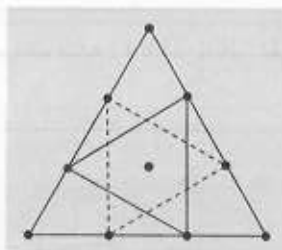
مثلث هایی در یک مثلث متساوی الاضلاع
بنج لایه ای

مثلث های متساوی الاضلاع بسیاری با اندازه های مختلف بسازید، قاعده ی بعضی به طرف پایین و بعضی از آنها وارونه، ولی در همه ی آن ها یک ضلع موازی با قاعده ی مثلث بزرگ وجود داشته باشد.

چند اندازه ی مختلف برای این مثلث ها می توان داشت؟ چند مثلث با قاعده ی به طرف بالا و چند مثلث با قاعده ی به طرف پایین در اندازه های مختلف وجود دارند؟

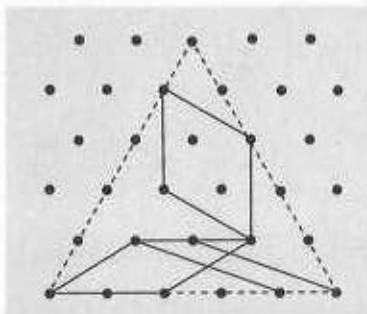
۲- در یک مثلث ۱۰۰ لایه ای متساوی الاضلاع

که روی یک شبکه ی مثلثی شکل، تشکیل شده است، می توانید تعدادی مثلث متساوی الاضلاع که قاعده ی آنها افقی نمی باشند، تشکیل دهید. چند اندازه ی مختلف از این مثلث های متساوی الاضلاع در جهات مختلف می توان تشکیل داد؟ چند تا از این مثلث های متساوی الاضلاع در اندازه ها و جهات مختلف می توان تشکیل داد؟

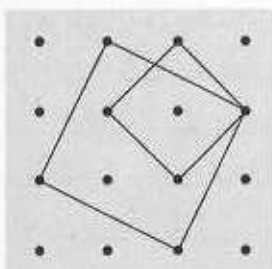


مثلث هایی در یک مثلث متساوی الاضلاع سه لایه ای

۳- یک مثلث ۱۰۰ لایه‌ای متساوی‌الاضلاع را که روی یک شبکه‌ی مثلثی شکل، تشکیل شده است، در نظر بگیرید. این بار، متوازی‌الاضلاع‌هایی با اندازه‌ها و جهت‌های مختلف تشکیل دهید. چند جهت و اندازه‌ی مختلف می‌توان داشت؟ چند متوازی‌الاضلاع با اندازه‌ها و جهت‌های مختلف می‌توانید تشکیل دهید.



۴- یک مربع ۱۰۰ لایه‌ای روی یک شبکه‌ی مربع شکل در یک صفحه تشکیل شده است.

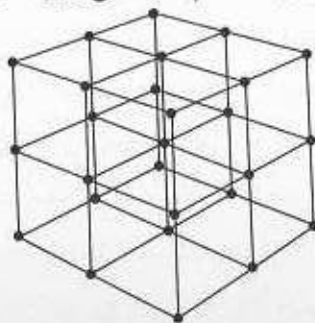


شما می‌توانید مربع‌های کوچک‌تری که قاعده‌ی آن‌ها افقی نمی‌باشند، تشکیل دهید. چند اندازه‌ی مربع در جهت‌های مختلف می‌توانید تشکیل دهید؟ چند مربع با اندازه و جهت‌های مختلف می‌توانید تشکیل دهید؟

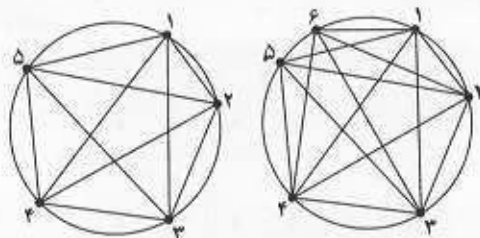
۵- می‌توان به نقاط روی یک شبکه‌ی مکعب‌شکل به‌عنوان

نقاطی در فضا که مختصات صحیح دارند، نگاه کرد. بنابراین، در

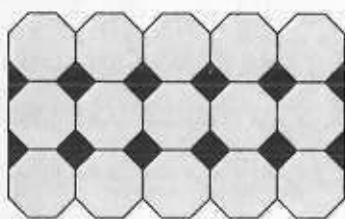
شبکه‌ی مکعب‌شکل، سه جهت «ترجیحی» وجود دارند: محور x ها، محور y ها و محور z ها و سه صفحه‌ی مختصات «ترجیحی» وجود دارند: صفحه‌ی $x-y$ ، صفحه‌ی $x-z$ و صفحه‌ی $y-z$. در یک مکعب ۱۰۰ لایه‌ای که روی شبکه‌ی مکعب‌شکلی که اضلاع آن موازی با صفحات مختصات هستند، تشکیل شده، می‌توانید نقاط را به هم وصل کنید و مکعب‌هایی تشکیل دهید که یک یا بیش از یک وجه آن با سه صفحه‌ی مختصات موازی نیستند. چه امکاناتی وجود دارد؟



۶- ۱۰ نقطه روی یک دایره در نظر بگیرید. تمام نقاط را دوبه دو به هم وصل کنید تا وترهایی از دایره را تشکیل دهند. نقاطی از دایره را طوری انتخاب کنید که هیچ سه وتری یک دیگر را در یک نقطه‌ی مشترک داخل دایره قطع نکنند. وترها دایره را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟



۷- درباره‌ی فرش کردن سطح با استفاده از کبی‌هایی از یک چندضلعی منتظم چیزهایی می‌دانید. برای مثال شما می‌توانید یک صفحه را با تعدادی مربع یک اندازه فرش کنید. الگوی فرش کردن یک



سطح با استفاده از فقط یک شکل خسته‌کننده است. شما می‌خواهید از موزاییک‌هایی با شکل‌های گوناگون در الگوی فرش کردن خود استفاده کنید و هنوز می‌خواهید که با داشتن موزاییک‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم، سطح را بدون هم‌پوشانی و بدون هیچ فاصله‌ای فرش کنید. شما مجاز هستید

از مربع و مثلث‌ها یا مثلث و پنج‌ضلعی‌ها یا هشت‌ضلعی‌ها استفاده کنید و می‌خواهید که اضلاع چندضلعی‌ها، یک به یک کنارهم قرار بگیرند پس طول تمام چندضلعی‌ها باید باهم برابر باشند؛ و چندضلعی‌ها در هریک از رئوس دارای وضعیت یکسانی باشند. شما می‌خواهید بدانید چه امکاناتی وجود دارد؟

۸- روی یک مربع 10×10 پله‌ای که بر یک شبکه مربع شکل در صفحه تشکیل شده بود، مثلث‌هایی می‌توان ساخت. این پروژه، تحقیقی است روی مساحت، محیط، تعداد نقاط داخلی شبکه، و تعداد نقاط مرزی شبکه‌ی این مثلث‌ها و چندضلعی‌هایی که با اتصال نقاط روی شبکه‌ی مربعی شکل، تشکیل شده‌اند. در زیر سؤالاتی که شما می‌توانید با آن‌ها تحقیق خود را آغاز کنید، آمده‌اند.

- بیش‌ترین مساحت یک مثلث بدون میخ‌های داخلی چه قدر است؟
- کم‌ترین مساحت یک مثلث بدون میخ‌های داخلی چه قدر است؟
- بیش‌ترین محیط یک مثلث بدون میخ‌های داخلی چه قدر است؟
- بیش‌ترین تعداد میخ‌های مرزی روی یک مثلث چندتا است؟
- بیش‌ترین مساحت مثلثی که تنها میخ مرزی آن، رأس‌های آن می‌باشند، چه قدر است؟

– بیش‌ترین محیط این‌گونه مثلث چه‌قدر است؟

– آیا می‌توانید رابطه‌ای بین تعداد میخ‌های مرزی، تعداد میخ‌های داخلی و مساحت یک مثلث

پیدا کنید؟

– چند تا چندضلعی مختلف با مساحت ۲ می‌توانید روی یک شبکه‌ی مربعی رسم کنید؟

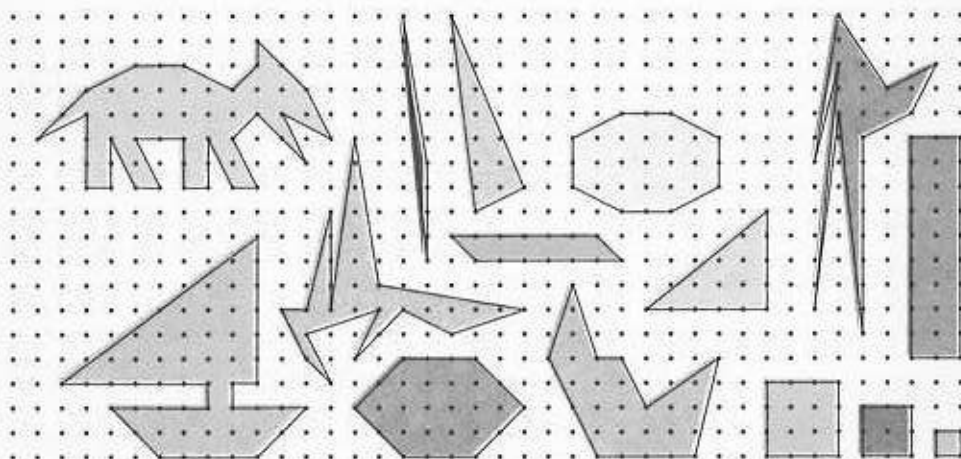
– آیا رابطه‌ی موجود برای مثلث‌ها، شامل چندضلعی‌های ساخته شده روی یک شبکه‌ی

مربعی نیز می‌شود؟

– آیا می‌توانید رابطه‌ای مشابه، بین حجم، نقاط داخلی، نقاط مرزی، ... برای اهرام مثلثی

(و دیگر چندوجهی‌ها) که با اتصال نقاط روی یک شبکه‌ی مکعبی در فضا، ایجاد می‌شوند، به‌دست

آورید؟



۹- بازی وایتف: به یک شبکه‌ی مربعی در صفحه به‌عنوان تمام نقاطی که مختصات صحیح

دارند، بنگرید. در این بازی دونفره، تخته‌ی بازی شامل تمام نقاط روی شبکه در ربع اول صفحه‌ی

مختصات، یعنی تمام (m, n) ‌ها به‌طوری که $m, n \geq 0$ ، می‌باشد. یک سکه‌ی 10° تومانی روی یک

نقطه‌ی شبکه (۴۷ و ۲۹) قرار داده شده است. دو بازیکن به‌نوبت سکه را به نقطه‌ی دیگری در تخته‌ی

بازی حرکت می‌دهند. در هر نوبت، بازیکن می‌تواند هرطور که بخواهد سکه را روی تخته‌ی بازی

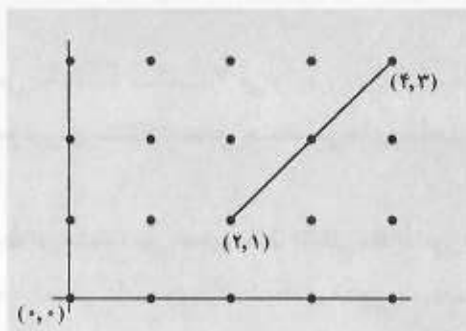
حرکت دهد ولی حرکت وی باید در یکی از جهت‌های زیر باشد:

– افقی، از راست به چپ ←

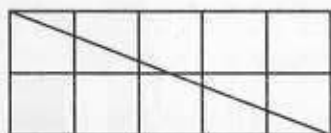
– عمودی، از بالا به پایین ↓

– مورّب. از گوشه‌ی سمت راست بالا به پایین سمت چپ (موازی خط $x = y$)

بازیکنی که اول به مبدأ (۰,۰) برسد، برنده است. آیا می‌خواهید بازیکنی باشید که اولین حرکت را انجام می‌دهد؟



۱-۱) یک مستطیل $m \times n$ (m و n اعداد صحیح مثبت‌اند) به مربع مساوی افراز شده



است (به وضوح). یک قطر مستطیل از تعدادی از این مربع‌ها می‌گذرد. چند تا؟

(b) قسمت a را به جعبه‌ای به شکل مکعب مستطیل

$m \times n \times p$ و یکی از قطرهای آن، تعمیم دهید.

۱-۲ سه سکه‌ی ۵ تومانی را طوری مرتب کنید که تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع بدهند.

با حرکت دادن فقط یکی از سکه‌ها، می‌توانید ترتیب قرار گرفتن سکه‌ها را طوری تغییر دهید که شکل

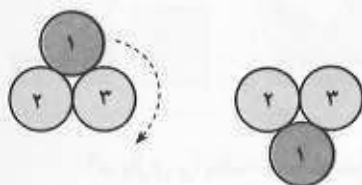
برعکس شود. حال، ۱۰۰۰ سکه‌ی ۵ تومانی را طوری مرتب

کنید که تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع بدهد. (شکل

مسئله‌ی ۸ را ملاحظه فرمایید). چند سکه‌ی ۵ تومانی را

باید حرکت دهید تا ترتیب قرار گرفتن سکه‌ها طوری تغییر

کند که شکل برعکس شود؟



۱-۲ میزی مستطیل شکل را با حاشیه‌ی اطراف آن در نظر بگیرید.

انتظار می‌رود یک توپ پس از برخورد با کناره‌ی میز به صورت زیر حرکت کند.

فرض کنید سطح میز مستطیلی به اندازه‌ی $m \times n$ (m و n اعداد صحیح مثبت‌اند) است.

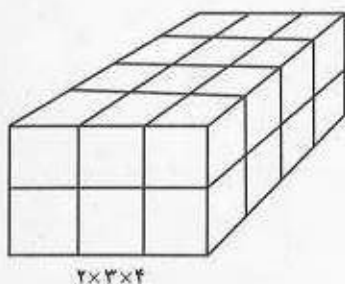
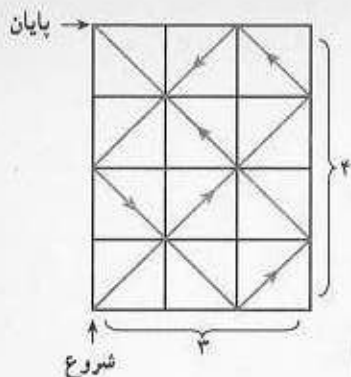
فرض کنید به یک توپ با زاویه‌ی 45° از یکی از گوشه‌ها به طرف یکی از اضلاع ضربه می‌زنیم.

راجع به مسیر توپ چه می‌توانید بگویید؟

فرض کنید که اگر یک توپ با

یکی از گوشه‌ها برخورد کند، می‌ایستد.



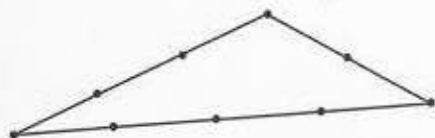


برای یک میز 1×1 توپ در گوشه روی گوشه ای که به آن ضربه زده شده، می ایستد. آیا این اتفاق برای میزهای $m \times n$ دیگر نیز می افتد؟ طول مسیر توپ، قبل از اینکه توپ بایستد، چه قدر است؟ چند بازگرد از دیواره هایی که توپ با آن ها برخورد می کند، تا توپ بایستد، وجود دارد؟

۱۳- یک نجار که با یک اره ی برقی کار می کند، قصد دارد تا یک قطعه چوب به ابعاد 12×32 سانتی متر در 96 سانتی متر را به $36 \times 32 \times 96 = 36864$ سانتی متر در 96 سانتی متر برسد. بعد از آن که چند قطعه مکعب کوچک 1 سانتی متری ببرد. بعد از آن که چند برش داده شد، او می تواند با یک برش کار را تمام کند. او می خواهد کار را با کم ترین تعداد برشها به پایان برساند. چگونه؟ و چند برش لازم دارد؟

۱۴- (گرفته شده از مسایل اکتشافی ریاضی، اثر فرد استیونسن ۱۹۹۳)

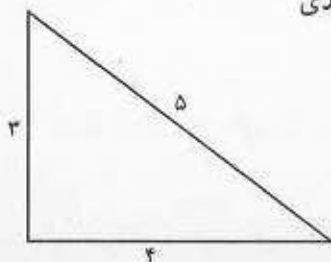
چند مثلث با اضلاع صحیح، محیطی برابر $1,000,000$ دارند؟ چند تا از این مثلث ها متساوی الاضلاع، چند تا متساوی الساقین و چند تا مختلف الاضلاع هستند؟ سؤال را عوض کنید.



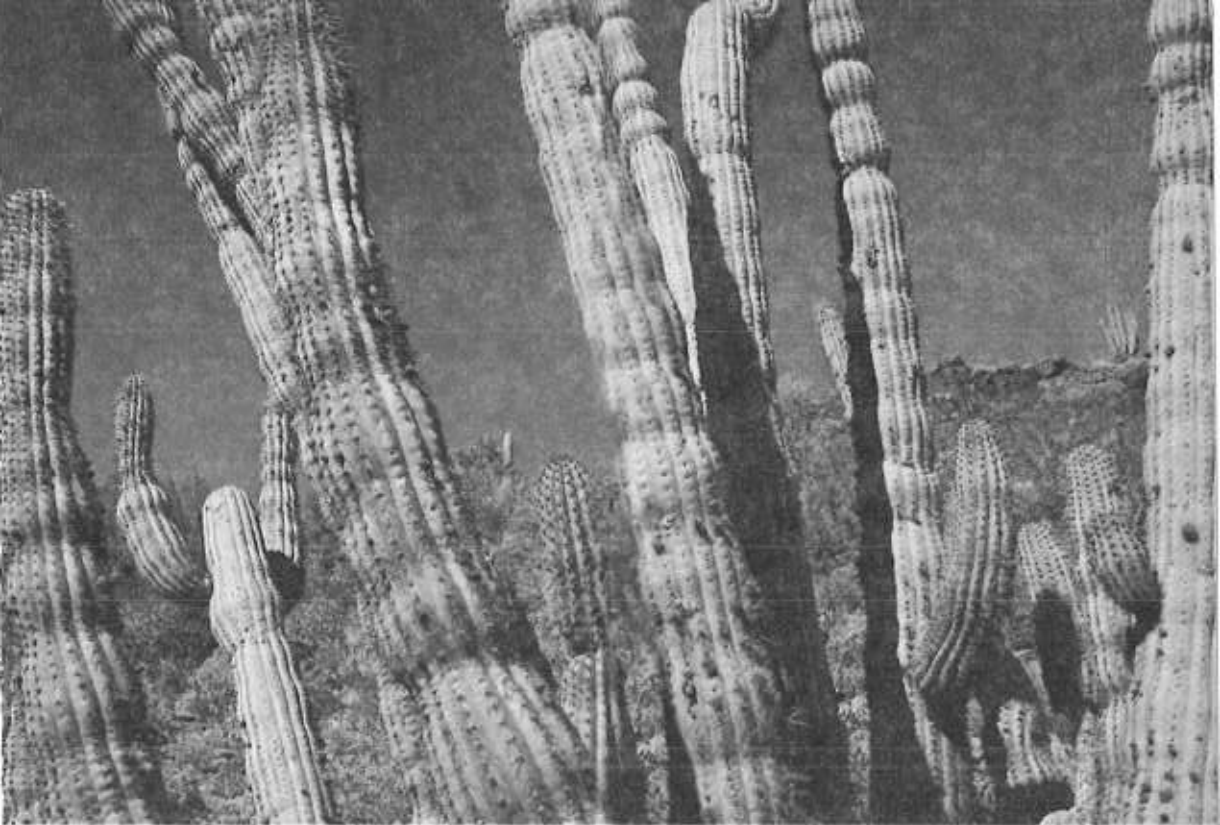
اگر بخواهید حداقل $1,000,000$ مثلث، مثلث متساوی الساقین و یا مثلث مختلف الاضلاع داشته باشید، محیط چه قدر باید باشد؟

۱۵- مثلثی با ضلع هایی به طول 3 ، 4 و 5

قائم الزاویه است. مثلثی با ضلع هایی به طول 5 ، 12 و 13 نیز قائم الزاویه است. مشاهده می شود که وترهای این دو مثلث عددهایی اول هستند! آیا مثلث های قائم الزاویه ی دیگری از این نوع وجود دارند؟ تحقیق کنید. می توان سؤال را به صورت زیر صورت بندی کرد:



به ازای چه اعداد اولی یک مثلث قائم الزاویه وجود دارد که طول وترش همان عدد اول باشد؟ آیا این مسئله تعمیم یا تعمیم هایی دارد؟ در صورت وجود آن ها را بررسی کنید.



۱۶- هر عدد طبیعی یا مربع کامل است یا مجموع دو مربع کامل است یا مجموع سه مربع کامل است یا ... (چند مربع برای نمایش اعداد کافی است؟)

$$1=1^2, \quad 2=1^2+1^2, \quad 3=1^2+1^2+1^2$$

$$4=2^2, \quad 5=2^2+1^2, \quad 6=2^2+1^2+1^2$$

$$7=2^2+1^2+1^2, \quad 8=2^2+2^2, \quad 9=3^2, \dots$$

یکی از ریاضی دانان این مسئله را تا ۳۲۵ بررسی کرد. [این بررسی را انجام دهید.] او براساس این بررسی ها قضیه ی چهار مربع زیر را بیان کرد:

در معادله ی زیر n عددی طبیعی است:

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

این معادله برای اعداد صحیح دارای جواب است.

مسئله: فرض کنید u عددی فرد و مثبت است. در مورد تعداد جواب های معادله ی

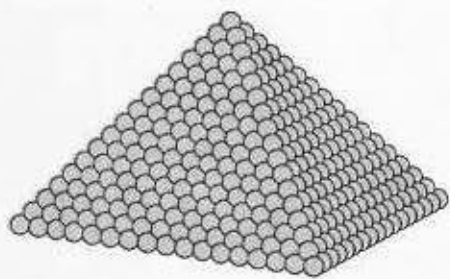
$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

در مجموعه ی اعداد طبیعی فرد تحقیق کنید. آیا این مسئله تعمیم دارد؟ در مورد تعمیم یا تعمیم های این مسئله چه می توان گفت؟

۱۷- در یک پادگان آموزشی هزار سرباز در حال آموزش نظامی هستند. در راهروی باریک و طولی منتهی به آسایشگاه پادگان برای هر سرباز یک قفسه اختصاص داده شده است. قفسه‌ها در یک طرف راهرو کنار هم قرار گرفته‌اند. هنگام جشن پایانی دوره‌ی آموزشی سربازها به ترتیب شادی‌کنان از راهرو به سمت جایگاه می‌دویدند. سربازان به ستون یک و به دورو به صورت زیر از راهرو گذر کردند:

اولین سرباز، در تمام قفسه‌ها را بست. نفر دوم، یک در میان در قفسه‌ها را باز کرد؛ سرباز سوم نیز دو در میان حالت در قفسه‌ها را عوض کرد یعنی اگر به در بسته می‌رسید آن را باز می‌کرد و اگر به در باز می‌رسید آن را می‌بست (البته دو در میان). سرباز چهارم سه در میان حالت در قفسه‌ها را تغییر می‌داد و به همین ترتیب همه‌ی سربازها عمل کردند و از راهرو خارج شدند. فرمانده‌ی پادگان پس از خروج سربازان از آسایشگاه و راهرو بازدید کرد و این بی‌انضباطی را تحمل نکرد و تصمیم گرفت در قفسه‌ی هر سربازی که باز بود، به او اضافه خدمت بدهد. شماره‌ی در قفسه‌ها با شماره‌ی سربازها یک‌سان بود. تعیین کنید کدام یک از سربازها مجازات می‌شوند. اگر در شروع کار اولین سرباز به جای بستن در همه‌ی قفسه‌ها آن‌ها را یک در میان تغییر حالت می‌داد و نفر دوم دو در میان و ... کدام یک از سربازان باید مجازات شوند؟ در مورد تعمیم این مسئله چه می‌توان گفت؟ آن را بررسی کنید.

۱۸- هرم مربعی روبه‌رو با گوی‌های هم‌اندازه ساخته شده است. الگویی برای تعداد گوی‌ها بیابید. مسئله را در حالت کلی بررسی کنید.



اگر هرم مثلی باشد الگو چگونه خواهد بود؟ آیا می‌توانید حالت‌های دیگری هم در نظر بگیرید؟ فکر می‌کنید با این روش می‌توان تعداد سنگ‌هایی که برای ساختن اهرام ثلاثه‌ی مصر به کار رفته است، به دست آورد؟

۱۹- یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

یک ریشه‌ی چند جمله‌ای $P(x)$ یعنی عددی مانند x_0 که

$$P(x_0) = 0$$

فرض کنید $a_n \neq 0$ و $a_0 \neq 0$ ، آن‌گاه چند جمله‌ای $Q(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

رابطه‌ی بین ریشه‌های $P(x)$ و $Q(x)$ را بررسی کنید. سعی کنید پاسخ خود را اثبات نمایید.

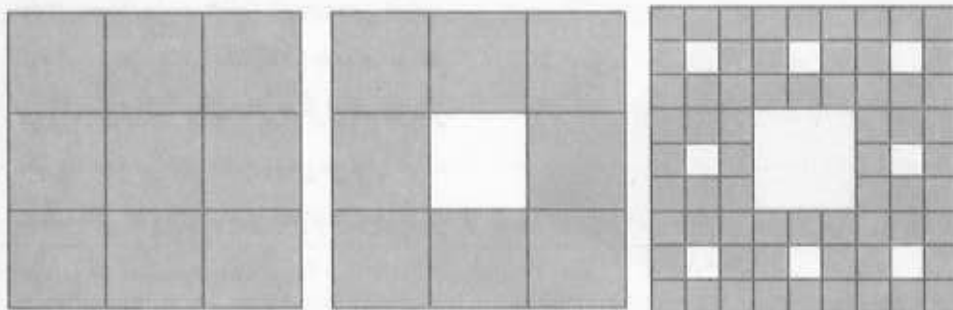
۲۰ - تشخیص سکه‌های تقلبی: از دوران باستان تاکنون این مسئله رواج داشته است. البته این مسئله بیش‌تر مربوط به حاکمان و شاهان و سازندگان جواهرآلات در دربار فرمانروایان بوده است.

فرض کنید تعدادی سکه داریم که یکی از آن‌ها تقلبی است طوری که از نظر ظاهر و اندازه یکسان هستند و نمی‌توان سکه‌ی تقلبی را با مشاهده تشخیص داد. سکه‌ی تقلبی یا سبک‌تر است یا سنگین‌تر. برای وزن کردن سکه‌ها ترازوی معمولی (دارای دو کفه) در اختیار است.

الف) مسئله‌ی اول تشخیص سکه‌های تقلبی: فرض کنید n سکه شامل یک سکه‌ی تقلبی و یک ترازوی معمولی دو کفه‌ای در اختیار داریم. علاوه بر این سبک‌تر بودن یا سنگین‌تر بودن سکه‌ی تقلبی معلوم است. کم‌ترین تعداد دفعاتی که می‌توان با کمک ترازو سکه‌ی تقلبی را تشخیص داد، چه قدر است؟ یک الگوی ریاضی برای پاسخ این مسئله بیابید.

ب) مسئله‌ی دوم تشخیص سکه‌های تقلبی: فرض کنید n سکه شامل یک سکه‌ی تقلبی در اختیار است با این تفاوت که سنگین‌تر یا سبک‌تر بودن سکه‌ی تقلبی نامعلوم است. کم‌ترین تعداد دفعاتی که می‌توان با کمک ترازو سکه‌ی تقلبی را تشخیص داد چه قدر است؟ تلاش کنید الگوی ریاضی پاسخ را کشف کنید.

۲۱ - فرش سرپینسکی: یک مربع به ضلع دلخواه رسم کنید و آن را رنگ کنید.



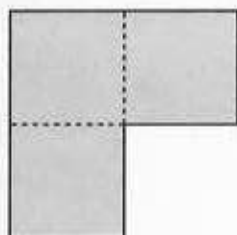
گام ۱: هر ضلع این مربع را به سه قسمت برابر تقسیم کنید و نقاط رو به رو و متناظر را با پاره خط به هم وصل کنید. نه مربع برابر ایجاد می‌شود. مربع وسط را برش دهید و حذف کنید.

گام ۲: اکنون فرآیند گام ۱ را برای هر مربع رنگی تکرار کنید و شکل بالا را به دست آورید.

فرض کنید این روند را تا بی‌نهایت تکرار کنیم، شکل نهایی فرش سرپینسکی نامیده می‌شود.

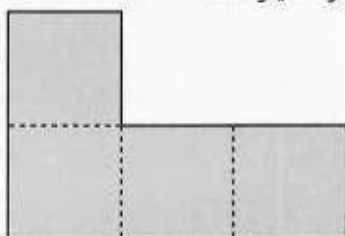
الگوی ریاضی فرش سرینسکی را به دست آورید. محیط و مساحت این فرش را که نمونه‌ای از فرکتال‌ها می‌باشد مقایسه کنید. آیا نکته‌ی عجیبی مشاهده می‌کنید؟ در مورد مساحت و محیط بخش‌های حذف شده چه می‌توان گفت؟

۲۲- یک صفحه‌ی شطرنجی $2^n \times 2^n$ در نظر بگیرید. یکی از خانه‌های آن را به دلخواه کنار



می‌گذاریم. آیا می‌توان این صفحه را با موزاییک‌هایی به شکل روبه‌رو پوشاند؟ تعمیم‌های این مسئله چه می‌توانند باشند؟ آن‌ها را مورد بررسی قرار دهید.

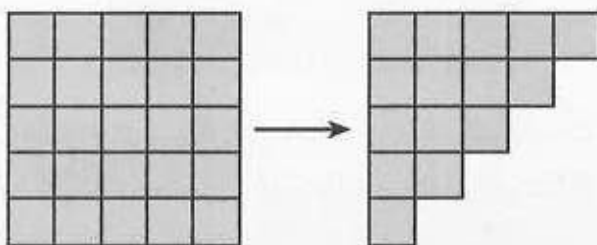
۲۳- میدان مستطیل شکل $m \times n$ مفروض است موزاییک‌هایی به شکل زیر در اختیار است.



آیا می‌توان این میدان را با این موزاییک‌ها پوشاند؟ در مورد شرط لازم و کافی برای این که بتوان میدان را با این موزاییک‌ها پوشاند، چه می‌توان گفت؟ آیا این مسئله دارای تعمیم است؟ بررسی کنید.

۲۴- یک صفحه‌ی شطرنجی در نظر بگیرید. چند مستطیل در آن وجود دارد؟ این مسئله چه تعمیم‌هایی دارد؟ آن‌ها را بررسی کنید.

۲۵- مربع فرسایش یافته: تعمیمی دیگر که شاید غیرمنتظره به نظر برسد. فرض کنید از یک صفحه‌ی شطرنجی $n \times n$ به ترتیب از انتهای سطر دوم یک مربع، از انتهای سطر سوم دو مربع، از انتهای سطر چهارم سه مربع و ... حذف می‌کنیم.

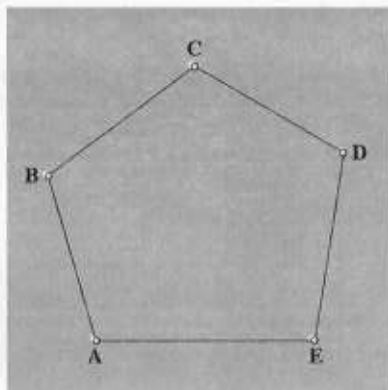


مربع کامل

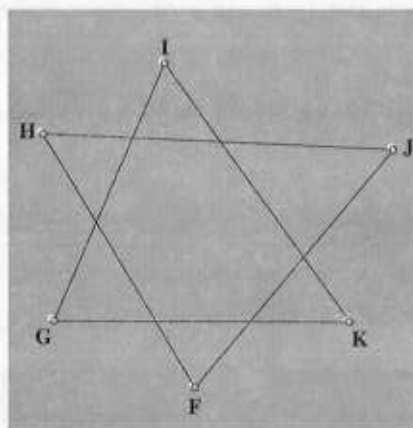
مربع فرسایش یافته

می‌خواهیم تعداد مستطیل‌های مربع فرسایش‌یافته را مورد تحقیق و بررسی قرار دهیم. تعداد مستطیل‌ها، برای یک مربع فرسایش‌یافته $n \times n$ را با $R(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$ نمایش دهید. آیا این نامگذاری را مناسب می‌دانید؟ در مورد تعمیم‌های این مسئله چه می‌توان گفت؟

۲۶- چندضلعی‌های ستاره‌ای: دایره‌ای رسم کنید و پنج نقطه‌ی متمایز روی آن در نظر بگیرید. این نقطه‌ها را یکی پس از دیگری به هم وصل می‌کنیم. شکل حاصل پنج‌ضلعی محدب است.

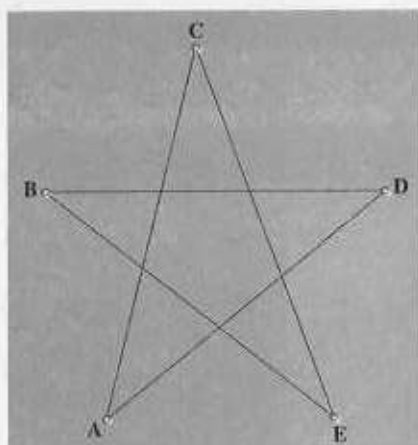


اگر این رئوس را یکی درمیان به هم وصل کنیم یک ستاره‌ی پنج‌پر به دست می‌آید.



البته گاهی اوقات با این روش شکل‌هایی به دست می‌آید که اجتماع چندضلعی‌های کوچک‌ترند. مثلاً اگر رئوس یک شش‌ضلعی محدب را یکی درمیان به هم وصل کنیم شکلی که به دست می‌آید اجتماع دو مثلث است.

می‌خواهیم برای مجموع زوایای داخلی n -ضلعی‌های محدب ستاره‌ای الگویی بیابیم.



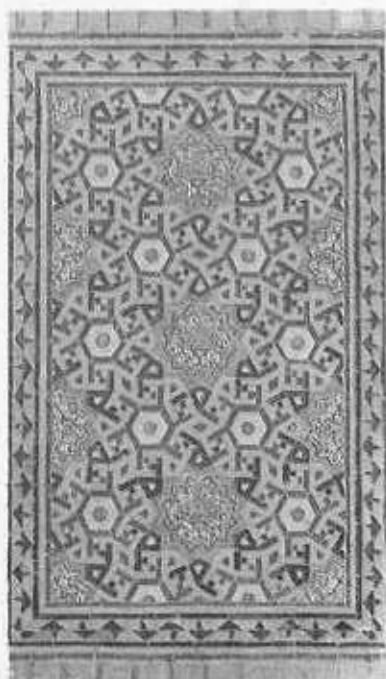
الف) آیا می‌توانید برای مجموع زوایای داخلی n -ضلعی محدب فرمولی ارائه کنید.

ب) اگر در هریک از این n -ضلعی‌ها با وصل کردن یک درمیان رئوس یک چندضلعی ستاره‌ای درست کنیم، مجموع زوایای داخلی این چندضلعی‌های ستاره‌ای چه قدر است؟

پ) اگر رئوسی را k درمیان به هم وصل کنیم، مجموع زوایای داخلی n -ضلعی ستاره‌ای به دست آمده چه قدر است؟

ت) کدام یک از این چندضلعی‌های ستاره‌ای بدون برداشتن خودکار از روی کاغذ به طوری که خودکار از روی هر ضلع یک‌بار عبور کند، قابل ترسیم است.

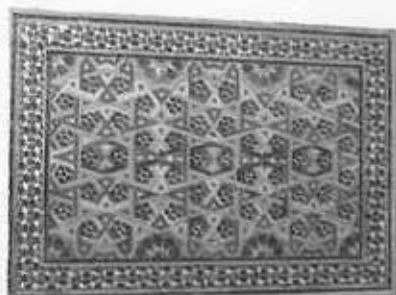
۲۷- کاشی‌کاری‌های زیر از آثار هنری مربوط به معماری ایرانی - اسلامی انتخاب شده است. الگوهای هندسی آن را رسم کنید و خواص هندسی آن‌ها (انتقال، بازتاب و دَوَران) را بررسی کنید.



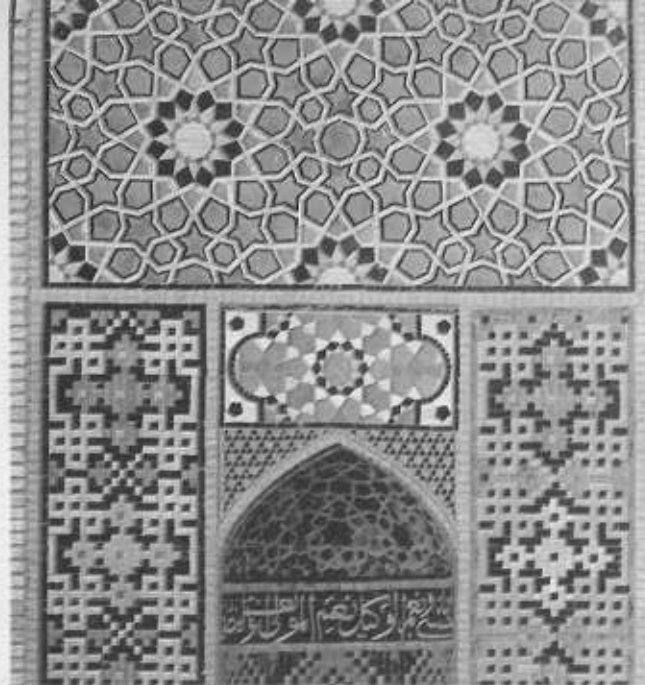
اصفهان: مدرسه‌ی چهارباغ



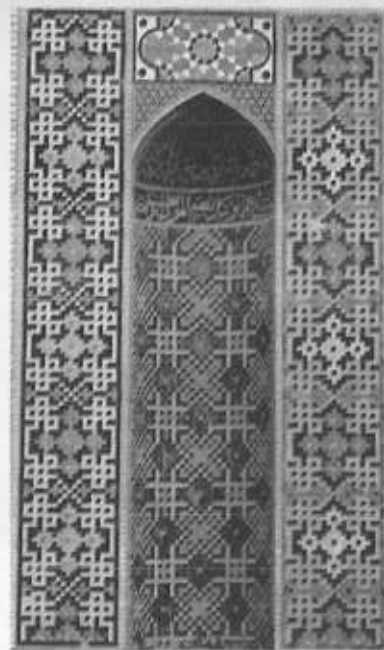
نیشابور: امامزاده محروق



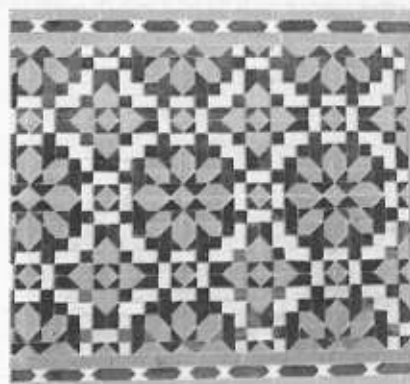
مشهد: مدرسه‌ی نواب



کرمان: مسجد جامع



کرمان: مسجد جامع



کاشان: مشهد اردهال: امامزاده سلطانعلی

۲۸- یک پژوهش گروهی: آثار باستانی و معماری بی نظیر ایرانی - اسلامی مملو از نقوش، طراحی‌ها و کاشی‌کاری‌های بی نظیر در تمام دنیا است. اندیشه‌ی پشت صحنه‌ی این نقوش، طراحی‌ها و کاشی‌کاری‌ها ترکیبی از ایده‌های عالی ریاضیات (ایده‌های هندسی، دوران‌ها، بازتاب‌ها، انتقال‌ها و تجانس‌ها) همراه با نگاه زیبایی‌شناسانه و ذوق و هنر ایرانی اصیل است. در استان خود یا استان‌های مجاور و نزدیک یک آثار باستانی انتخاب کنید و درمورد ایده‌های ریاضی (بازتاب‌ها، دوران‌ها، انتقال‌ها، تجانس‌ها و ایده‌های هندسی دیگر) آن تحقیق کنید. این کار یک پژوهش است.

یار با ماست. چه حاجت که زیادت طلبیم



احتمال هندسی

یک منبع از کاربردهای مهم و لذت‌بخش ریاضیات دبیرستان

نویسنده: ...

چکیده

باتوجه به تحولات آموزش ریاضی در نیمه‌ی دوم قرن بیستم و اهمیت و نقش منحصر به فرد ریاضیات در زندگی هر شهروند برای ورود به قرن بیست و یکم، تغییرات برنامه‌های درسی و تغییرات اولویت‌های مواد درسی و استانداردهای آموزشی بلامنازع است. استانداردهای آموزش ریاضی در حال حاضر ارتباط و پیوند بین ریاضیات و دنیای واقعی، درک شهودی و پرهیز از تجرید زودهنگام، ارتباط و پیوند بین موضوعات درون ریاضی و بارز کردن وحدت ریاضیات، تأکید بر ریاضی‌گونه کردن پدیده‌ها و مدلسازی ریاضی، سودمندی و لذت‌بخش بودن ریاضیات، ارائه‌ی زیبایی ریاضیات، ارائه‌ی کاربردهای زیبا برای درک کارایی ریاضیات و شوق برانگیز کردن ریاضیات و ... است. احتمال هندسی یکی از موادی است که وارد برنامه‌ی ریاضی دبیرستان شده است. در این مقاله دلایل زیادی ارائه شده است که چرا باید احتمال هندسی در دبیرستان تدریس شود و با ارائه‌ی شواهدی (مثال‌ها) ملموس علت وجود این موضوع در برنامه‌ی دبیرستان را خاطر نشان کرده است. علاوه بر این گنجینه‌ی زیبایی از مسئله‌های چالش برانگیز و واقعی ارائه شده تا معلمین گرامی بتوانند برای تدریس این موضوع در دبیرستان‌ها در صورت نیاز از آن استفاده کنند.

۱- احتمال هندسی چیست؟

احتمال هندسی چیست؟ چرا مطالعه‌ی آن سودمند و لذت‌آور است؟ در پاسخ سؤال اول باید گفت که احتمال هندسی با احتمال روی فضاها، نمونه‌ای نامتناهی سروکار دارد، آن جایی که هر برآمد آزمایش مورد نظر به طور هم‌شانس اتفاق می‌افتد. پیامد احتمال هندسی، محاسبه‌ی احتمال رخداد یک پیش‌آمد تصادفی در یک بار انجام یک آزمایش است. به این صورت، که فضای نمونه‌ای را با

یک ناحیه‌ی هندسی R و پیش‌آمد را با یک زیرناحیه‌ی r از R ، یک‌سان می‌گیریم و آن‌گاه می‌توانیم برای محاسبه‌ی احتمال‌های موردنظر از هندسه استفاده کنیم.

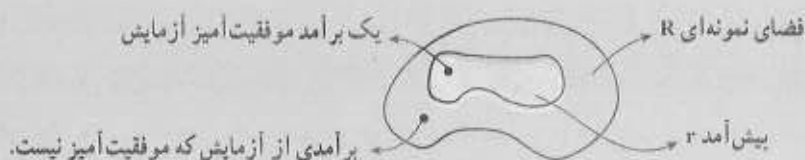
با مخاطب قرار دادن خودمان در برابر دومین سؤال خاطر نشان می‌کنیم که احتمال هندسی سرشار از مسئله‌های زیبا و جالب است که در همه‌ی سطوح دبیرستان به کار گرفته می‌شوند، از جبر مقدماتی گرفته تا مثلثات (و حتی حسابان، اگرچه در این جا این نوع مسئله‌ها را در نظر نمی‌گیریم). حل مسئله‌ها در احتمال هندسی نیازمند مفاهیمی نظیر پیدا کردن مساحت یک دوزنقه، رسم نامساوی‌ها، یا به کار بردن قانون کسینوس‌ها است. بنابراین، موضوع و مواد احتمال هندسی به خوبی می‌تواند برای تکمیل تقریباً هر رشته‌ای از ریاضیات دبیرستان به کار برده شود. به ویژه، یکی از خاصیت‌های خوب احتمال هندسی این است که تعریف‌های آن بسیار شهودی هستند و این تعریف‌ها را می‌توان در زمانی کوتاه، معرفی و ارائه کرد. بنابراین، دانش‌آموزان می‌توانند بی‌درنگ با مسئله‌های مهم شروع به کار بکنند.

احتمال هندسی می‌تواند در خدمت توسعه‌ی مهارت‌های دانش‌آموزان در حل مسئله باشد یعنی همان جایی (حیطه‌ای) که بیش‌تر دانش‌آموزان ضعیف هستند. در هر مسئله کاربردی، لازم است وضعیت و شرایط را به یک مدل ریاضی ترجمه و برگردان کنیم. به وجود آوردن این گونه برگردان‌ها و انتقال‌ها، دقیقاً پایه و اساس حل مسئله است و دانش‌آموزان هرچه بیش‌تر در معرض این گونه طرز تفکر قرار گیرند حقیقتاً ارزشمند خواهد بود.

قبل از پیش‌بردن بحث، به تعریف بعضی از مفاهیم اساسی احتمال که مورد استفاده قرار می‌گیرند نیاز داریم. مجموعه‌ی همه‌ی برآمدهای ممکن یک آزمایش، فضای نمونه‌ای آن آزمایش نامیده می‌شود. یک پیش‌آمد یک زیرمجموعه‌ی از فضای نمونه‌ای است. یک پیش‌آمد مفروض را به طور ذهنی در نظر بگیرید. اگر یک برآمد متعلق به پیش‌آمد باشد آن را یک موفقیت گفته و اگر یک برآمد متعلق به پیش‌آمد نباشد آن را یک شکست می‌گوییم.

با یک آزمایش دنیای واقعی که برآمدهای آن به طور تصادفی رخ می‌دهند و یک پیش‌آمد شروع می‌کنیم. می‌خواهیم احتمال یک پیش‌آمد را بر اساس یک بار انجام یک آزمایش محاسبه کنیم. اولین گام به سمت هدف، متناظر کردن هر برآمد آزمایش با یک نقطه در یک ناحیه‌ی هندسی است. برای ما، یک ناحیه‌ی هندسی یا یک قطعه‌ی منحنی (در حالتی که ناحیه‌ی هندسی یک بعدی است) و یا یک ناحیه‌ی مسطح (وقتی ناحیه‌ی هندسی دوبعدی است) خواهد بود. پس از این کار به سادگی دیده می‌شود که یک برآمد از یک آزمایش دنیای واقعی که به طور تصادفی رخ می‌دهد، با انتخاب تصادفی یک نقطه از یک ناحیه‌ی هندسی، که این ناحیه‌ی هندسی نمایش دهنده‌ی فضای نمونه‌ای آزمایش است، متناظر می‌شود. این آزمایش ریاضی یعنی انتخاب تصادفی یک نقطه از یک ناحیه‌ی

هندسی، مدل ریاضی آزمایش دنیای واقعی است و ما می‌خواهیم از این مدل ریاضی برای محاسبه‌ی احتمال‌های مورد نظر استفاده کنیم. نماد R را برای ناحیه‌ی هندسی که فضای نمونه‌ای آزمایش را نمایش می‌دهد، به کار می‌بریم. یک پیش‌آمد نیز به وسیله‌ی یک زیر ناحیه‌ی r از R نمایش داده می‌شود. این مفاهیم در شکل (۱) خلاصه شده‌اند.



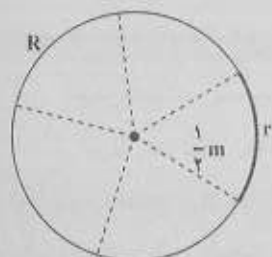
شکل ۱

آزمایش: انتخاب تصادفی یک نقطه از R .

برآمد موفقیت آمیز: نقطه به r تعلق داشته باشد.

برآمد غیر موفقیت آمیز: نقطه به r تعلق نداشته باشد.

مثال ۱: یک چرخ گردان^۱ به قطر یک متر به پنج بخش مساوی تقسیم شده است که با رنگ‌های قرمز، سفید، آبی، قرمز و سفید (شکل ۲) مشخص هستند. اگر توپ بازیکن روی بخش آبی قرار گیرد جایزه را می‌برد. پیش‌آمدی را در نظر بگیرید که بازیکن برنده می‌شود.

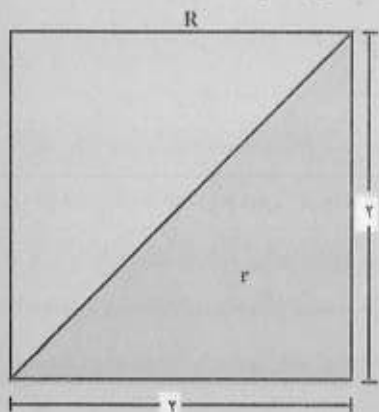


شکل ۲

می‌توانیم فضای نمونه‌ای آزمایش را به وسیله‌ی دایره‌ای به قطر یک متر نمایش دهیم. در این صورت، زیر ناحیه‌ی r از R که ناحیه‌ی موفقیت را نمایش می‌دهد کمان آبی رنگ دایره است که طول این کمان $\frac{1}{5}$ محیط دایره است.

مثال ۲: یک صفحه هدف^۲ مربعی شکل به ضلع ۲ فوت با رسم

قطر به دو بخش تقسیم شده است. یک بخش آن سیاه رنگ و بخش دیگر آن سفید رنگ شده است.



شکل ۳

به طور تصادفی یک پیکان به سمت صفحه‌ی هدف پرتاب کرده فرض می‌کنیم که حتماً به صفحه‌ی هدف برخورد می‌کند. ما به پیش‌آمد برخورد پیکان به بخش سیاه رنگ علاقه مندیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش را می‌توان با ناحیه‌ی مربع شکل به ضلع ۲ واحد نمایش داد. ناحیه‌ی R و زیر ناحیه‌ی r متناظر با پیش‌آمد مفروض در شکل ۳ نمایش داده شده‌اند.

بالاخره، متوجه شدیم که احتمال رخ دادن پیش‌آمد

مورد نظر در این آزمایش برابر با احتمال آن است که یک نقطه‌ی به تصادف انتخاب شده‌ی از مربع R ، به زیر ناحیه‌ی r تعلق داشته باشد. اما چگونه می‌توانیم این احتمال را تعیین کنیم؟ در مثال ۱، این فرض معقول به نظر می‌رسد که احتمال این که نقطه‌ی انتخابی تصادفی، از ناحیه‌ی R در r واقع باشد برابر است با:

$$P(r) = \frac{r \text{ طول}}{R \text{ طول}} = \frac{\pi/5}{\pi} = \frac{1}{5}$$

و در مثال ۲

$$P(r) = \frac{r \text{ مساحت}}{R \text{ مساحت}} = \frac{(\frac{1}{4})(\pi^2)}{\pi^2} = \frac{1}{4}$$

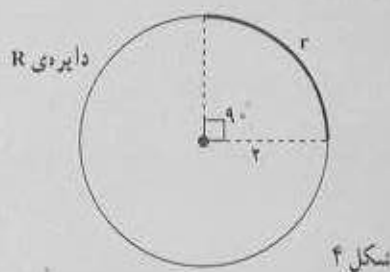
بنابراین می‌توانیم به‌طور کلی بگوییم احتمال این که یک نقطه‌ی به‌طور تصادفی انتخاب شده از R در زیر ناحیه‌ی r واقع باشد برابر است با:

$$P(r) = \frac{r \text{ اندازه‌ی}}{R \text{ اندازه‌ی}}$$

اگر R یک بعدی باشد، اندازه به معنای طول و اگر R دوبعدی باشد، اندازه به معنای مساحت است.

مثال ۳: برای فضای نمونه‌ای R و پیش‌آمد r که در شکل‌های ۴ و ۵ نمایش داده شده است، احتمال آن که یک نقطه‌ی به‌طور تصادفی انتخاب شده از ناحیه‌ی R در زیر ناحیه‌ی r واقع باشد را محاسبه می‌کنیم. در شکل ۴ راه‌حل به‌صورت زیر است:

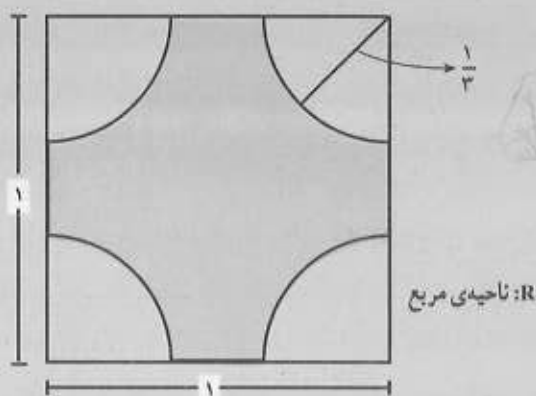
$$P(r) = \frac{r \text{ طول}}{R \text{ طول}} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} = 0.5$$



و برای شکل ۵ راه‌حل به این صورت است:

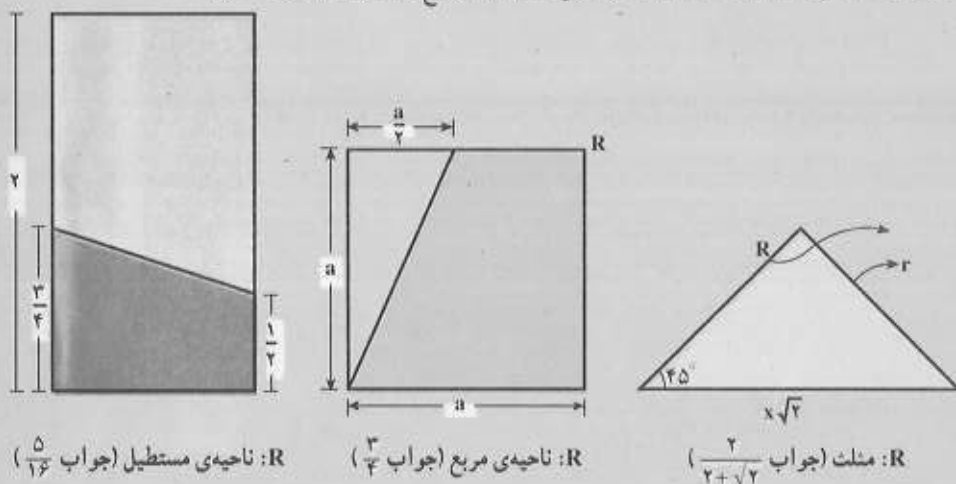
$$P(r) = \frac{r \text{ مساحت}}{R \text{ مساحت}} = \frac{\text{مساحت چهار ربع دایره} - \text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مربع}}$$

$$= \frac{1 - (\pi(\frac{1}{4})^2)}{1} = 1 - \frac{\pi}{4} = 0.65$$



شکل ۵

اکنون برای هر کدام از ناحیه های R و زیر ناحیه های r در شکل ۶، احتمال آنکه نقطه ی به تصادف انتخاب شده از ناحیه ی R در زیر ناحیه ی r واقع باشد را محاسبه کنید.



شکل ۶

۲- مسئله های اساسی در احتمال هندسی

اکنون بعضی از کاربردهای مستقیم احتمال هندسی را در نظر می گیریم.

مسئله ضبط صوت: جو و مو گفتگوی نیم ساعته درباره ی فعالیت های غیرقانونی شب گذشته خودشان داشتند. بدون آنکه آن ها بدانند گفتگوی شان روی نوار ضبط می شد. پلیس به نوار دسترسی پیدا کرده و کشف کرد که یک بازه ی ۱۰ ثانیه ای از نوار شامل اطلاعاتی است که مجرمیت جو و مو را نشان می دهد. بعداً مشخص شد که بخشی از این بازه ی ۱۰ ثانیه ای توسط یکی از مأمورین پلیس پاک شده است. این مأمور گفت که سهواً یک دگمه اشتباهی را فشار داده و از آن جا به بعد همه ی



نوار پاک شده است. اگر بازه‌ی 10° ثانیه‌ای بعد از نیم دقیقه روی نوار شروع شده باشد، احتمال اینکه بخشی از گفتگوی متهم‌کننده به‌طور تصادفی پاک شده باشد چه قدر است؟

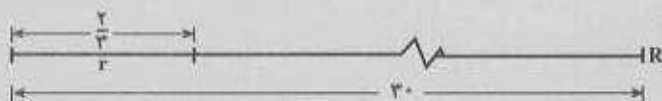
حل: نوار 30° دقیقه‌ای را به‌صورت یک پاره خط (R) به‌طول 30° نمایش می‌دهیم. در

شکل ۷، پاره خط R و پاره خط متناظر با بازه‌ی 10° ثانیه‌ای ($\frac{1}{3}$ دقیقه‌ای) که حاوی مدرک جرم می‌باشد نمایش داده شده است.



شکل ۷

حال اگر نقطه‌ای که پاک‌شدگی از آن شروع می‌شود در داخل یا سمت چپ بازه‌ی حاوی مدرک جرم واقع باشد، موفقیت و در غیر این صورت شکست خواهیم داشت. پس ناحیه‌ی موفقیت r ، پاره خطی به طول $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ است که از نقطه‌ی انتهایی سمت چپ پاره خط R شروع می‌شود. فضای نمونه‌ی این آزمایش و ناحیه موفقیت r در شکل ۸ نمایش داده شده‌اند.



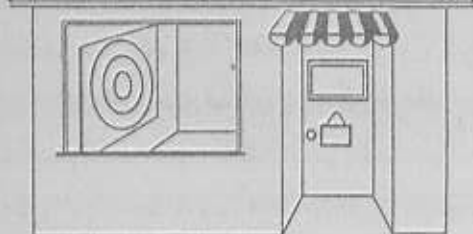
شکل ۸

در نتیجه :

$$P(r) = \frac{r}{R} = \frac{\frac{2}{3}}{30} = \frac{2}{90} = 0.02$$

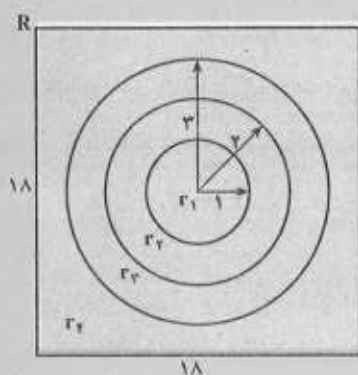
مسئله‌ی پیتزا: سالن پذیرایی اغذیه‌فروشی دارای یک صفحه‌ی هدف ۱۸ سانتی متری آویخته به دیوار نزدیک درب ورودی جلویی سالن است. با پرداخت یک ۲۵ تومانی مشتری این شانس را دارد که با پرتاب پیکان به صفحه‌ی هدف یکی از سه نوع پیتزا را به‌عنوان جایزه ببرد. صفحه‌ی هدف شامل سه دایره‌ی هم‌مرکز به‌طوری است که بر مرکز صفحه‌ی هدف منطبق است. جایزه‌ی چسبیدن پیکان به ناحیه‌ی دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی متر (مرکز هدف)، یک پیتزای بزرگ است. اگر پیکان به ناحیه‌ی بین دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی متر و دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی متر برخورد کند، جایزه یک

اغذیه فروشی



پیتزای متوسط و اگر پیکان به ناحیه‌ی بین دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی متر و دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی متر برخورد کند جایزه یک پیتزای کوچک است. اگر پیکان به ناحیه‌ی بیرون دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی متر برخورد کند مشتری کاملاً بازنده است. ما فرض می‌کنیم پرتاب پیکان به‌طور کاملاً تصادفی انجام شده و پیکان حتماً با صفحه برخورد

می‌کند. کمان‌های دایره‌ها دارای ضخامت نبوده و پیکان به کمان‌های دایره‌ها نمی‌چسبید. در این صورت احتمال پیش‌آمدهای زیر را بیابید.



شکل ۹

الف) مشتری یک پیتزای بزرگ برنده شود.
ب) مشتری یک پیتزای متوسط جایزه بگیرد. پ) یک پیتزای کوچک برنده شود. ت) مشتری کاملاً بازنده شود.
حل: می‌توانیم فضای نمونه‌ای آزمایش را به وسیله‌ی یک ناحیه‌ی مربعی به ضلع ۱۸ نمایش دهیم. شکل ۹ ناحیه‌ی R و زیرناحیه‌های r_1 و r_2 و r_3 و r_4 که به ترتیب نشان دهنده‌ی بردن یک پیتزای بزرگ، متوسط، کوچک و یا بازنده شدن هستند را نشان می‌دهد.

$$P(r_1) = \frac{r_1^2}{R} = \frac{\pi(1^2)}{18^2} = \frac{\pi}{324} = 0.01 \quad \text{الف)}$$

$$P(r_2) = \frac{r_2^2}{R} = \frac{\pi(2^2) - \pi(1^2)}{324} = \frac{3\pi}{324} = 0.03 \quad \text{ب)}$$

$$P(r_3) = \frac{r_3^2}{R} = \frac{\pi(3^2) - \pi(2^2)}{324} = \frac{5\pi}{324} = 0.05 \quad \text{پ)}$$

$$P(r_4) = \frac{r_4^2}{R} = \frac{324 - \pi(3^2)}{324} = \frac{324 - 9\pi}{324} = 0.91 \quad \text{ت)}$$

در این جا مسئله‌های مشابهی آورده شده‌اند تا با استفاده از روش حل دو مسئله‌ی قبل به حل آن‌ها بپردازید.

۱- در مسئله‌ی پیتزا، شعاع بزرگترین دایره چه قدر باید باشد تا احتمال بازنده شدن کامل،

۲۱۵/۰ = شود؟ (جواب : ۹ سانتی متر).

۲- در مسئله‌ی ضبط صوت، بازه‌ی ۱ ثانیه‌ای در کجای نوار قرار گیرد تا الف) احتمال مطلوب

۷۵/۰ = شود. ب) بزرگ‌ترین احتمال ممکن به دست آید. پ) این احتمال چه قدر است؟ (جواب :

الف - بایستی بعد از $22/33$ دقیقه روی نوار شروع شود. ب - " ۱ ثانیه آخر نوار. (۱)

۳- گفته شده است که در هنگام طوفان، هواپیمایی در فاصله‌ی زمانی ۱۲ ظهر تا $3: 12$

بعد از ظهر سقوط کرده است. احتمال این که در فاصله‌ی زمانی نیم ساعته، زمان سقوط از : الف) $2: 0$

دقیقه، ب) 15 دقیقه، پ) 10 دقیقه، ت) 25 دقیقه، ث) 30 دقیقه، فراتر رفته باشد چه قدر است؟ احتمال

این که زمان بعد از سقوط از محدوده‌ی زمان‌های فوق پیش‌تر نشود چه قدر است؟ (راهنمایی : فضای

نمونه‌ای را رسم کنید و مجموعه‌ی برآمدهای موفقیت یعنی پیش‌آمد موفقیت برای هر قسمت را مشخص

کنید و توجه کنید که پیش‌آمد موفقیت اشتراک دو پیش‌آمد است). (جواب : $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$).

۴- یک ایستگاه تلویزیونی برنامه‌هایش را برای بخش هشدار درباره‌ی گردباد فوری قطع می‌کند

و به محض دریافت خبر دیده شدن گردباد، آن را اعلام می‌کند. فرض کنید خبر هشدار دهنده‌ی گردباد

در زمانی که یک مسابقه‌ی فوتبال از تلویزیون پخش می‌شود اعلام گردد. مطلوب است احتمال این که

در زمان اعلام خبر طوفان، بخشی از بازی که انجام شده یا بخشی از بازی که باید انجام شود دست‌کم

دو برابر بزرگتر از بخش دیگر مسابقه باشد مشروط بر اینکه الف) زمان استراحت بین دو نیمه‌ی بازی

نباشد ب) یک نیمه‌ی بازی تمام شده باشد و وقت استراحت یک ربع باشد. (جواب : $\frac{2}{3}, \frac{8}{15}$)

۳- کاربردهای کمتر سرراست

مسئله‌های دنیای فیزیکی که بعد از این در نظر می‌گیریم، نیازمند نوع و هوش بیش‌تری برای

مرتبط کردن برآمدهای دنیای واقعی یک آزمایش با هستای ریاضی آن‌ها در مدل ریاضی متناظر که

همان انتخاب یک نقطه‌ی تصادفی در یک ناحیه‌ی هندسی است می‌باشد.

مسئله‌ی زندان: یک عضو گروه گانگستری (هفت تیرکشان) شیرینی به نام «شیرین دندان» به

جرم دستبردزدن به یک کارخانه‌ی شکلات‌سازی و ایجاد بدعت شکلات خوری زندانی است! و باید

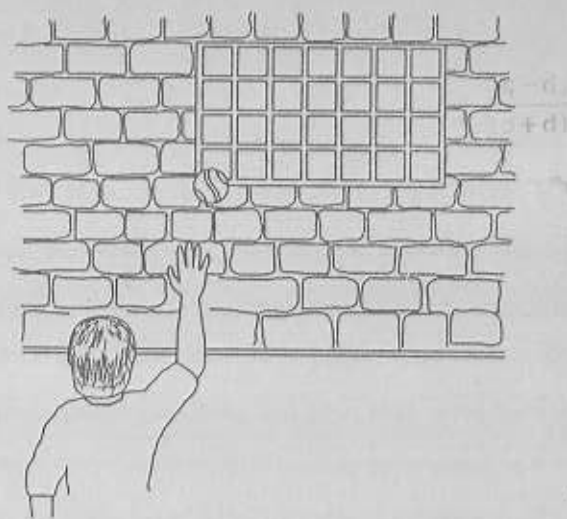
دوران محکومیت را بدون شکلات سپری کند! به عبارت دیگر، او اجازه‌ی خوردن شکلات ندارد!

اعضای این گروه نقشه‌ای طرح می‌کنند تا به وسیله‌ی جاسازی شکلات در یک توپ توخالی و پرتاب

توپ از راه سوراخ پنجره زندان، به او شکلات برسانند. فرض کنید قطر توپ n سانتی متر باشد و به‌طور

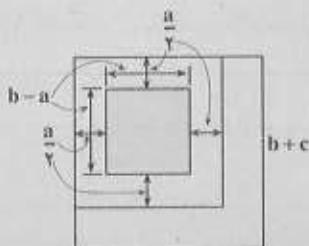
تصادفی به سمت پنجره‌ی زندان پرتاب شده و حتماً به پنجره برخورد کند. پنجره‌ی زندان به وسیله‌ی

میله‌های فلزی (عمودی - افقی) مشبک شده است. ضخامت نرده‌ها n سانتی متر و فضای باز بین

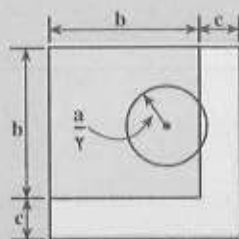


نرده‌ها به شکل مربع‌هایی به طول ضلع b سانتیمتر ($a < b$) هستند. احتمال اینکه توپ از پنجره عبور کند چه قدر است؟

حل: هر برآمد این آزمایش را به عنوان وضعیت مرکز توپ وقتی توپ به پنجره برخورد می‌کند، در نظر می‌گیریم. ما می‌توانیم توجه خود را به یکی از دریچه‌های دلخواه و دوتا از میله‌های پایین و سمت راست [مطابق شکل] متمرکز کنیم. (توجه: در نتیجه پرتاب هر توپ، یا توپ از آن دریچه مشخص عبور می‌کند و یا با میله‌های سمت راست و پایین دریچه برخورد می‌کند که در این صورت توپ وارد سلول زندان نمی‌شود). برای وقوع یک موفقیت [یعنی عبور توپ از پنجره] باید مرکز توپ حداقل در فاصله‌ای به اندازه‌ی شعاع آن یعنی $\frac{a}{2}$ واحد از هر میله فرارگیرد. فضای نمونه‌ای (R) این آزمایش می‌تواند به وسیله‌ی مربعی به طول ضلع $b+c$ ، همانگونه که در شکل ۱۰ مشاهده می‌کنید، نمایش داده شود. ناحیه‌ی موفقیت r به صورت ناحیه‌ی مربعی شکل به ضلع $b-a$ در شکل ۱۱ نشان داده شده است. مساحت این ناحیه $(b-a)^2$ و مساحت مربع بزرگتر که معرف تمام فضای



شکل ۱۱

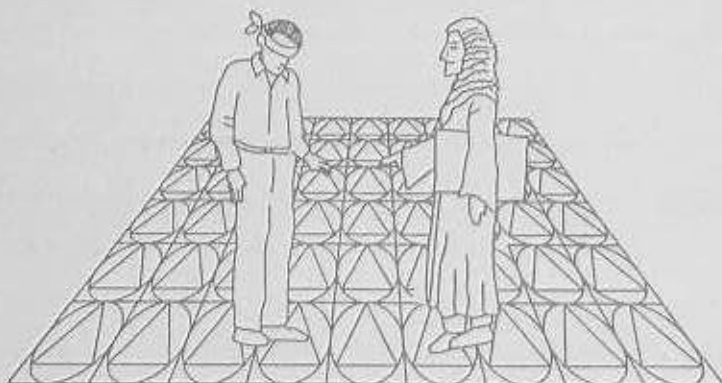


شکل ۱۰

نمونه‌ای است برابر $(b+c)^2$ می‌باشد. بنابراین،

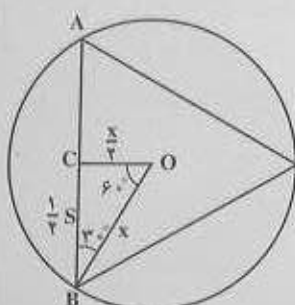
$$P(r) = \frac{(b-a)^2}{(b+c)^2}$$

مسئله‌ی ایجاد حریق عمدی: در دادگاهی کف سالن دادگاه با کاشی‌های مربعی مفروش است. و طرح روی هر کاشی یک دایره است که یک مثلث متساوی الاضلاع در آن محاط شده است. در این دادگاه نوع محکومیت مجرم (کسی که حریق عمدی ایجاد کرده) به وسیله‌ی شانس تعیین می‌گردد! بسته به شانس متهم، مجازات چنین جرمی از ۱۰ سال تا ۲۰ سال زندان است. متهم اجازه دارد که با چشم بسته یک میله‌ی فلزی [کوتاه] خیلی باریک را روی دایره‌ی یکی از کاشی‌ها بیندازد. اگر



فاصله‌ی نقطه‌های تلاقی میله با دایره بزرگتر از ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط شده باشد، مدت محکومیت ۱۰ سال و در غیر این صورت ۲۰ سال خواهد بود. احتمال این که مدت محکومیت مجرم ۱۰ سال باشد را تعیین کنید. [منبع ۱ را ببینید]

حل: چون هر دو نقطه‌ی دایره یک وتر را مشخص می‌کنند، این آزمایش را انتخاب تصادفی یکی از وترهای دایره تصور می‌کنیم و در جستجوی احتمال موقعیتی هستیم که در آن طول وتر بیش‌تر از طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی گردد. اکنون با استفاده از احتمال هندسی، هر وتر را با نقطه‌ی وسط آن یکی گرفته هر برآمد این آزمایش، نقطه‌ی وسط وتر انتخاب شده خواهد بود. (توجه: هر نقطه داخل دایره نقطه‌ی وسط یک و تنها یک وتر از آن دایره است) ما نیازمند پیدا کردن نقطه‌هایی از دایره هستیم که یک موفقیت را تشکیل می‌دهند. شکل ۱۲ دایره‌ای به شعاع x ، یک مثلث متساوی الاضلاع محاط شده در آن دایره به ضلع s و یک پاره خط



شکل ۱۲

OC که از O (مرکز دایره) بر ضلع AB عمود است را نشان می‌دهد. چون مثلث متساوی الاضلاع است پس: $\hat{AOB} = 120^\circ$

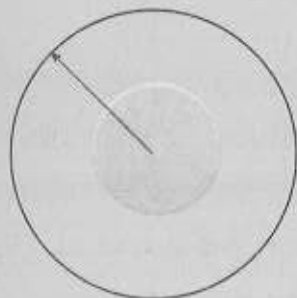
خاصیت‌های دیگر دایره به ما اندازه‌های زیر را می‌دهد:

$$\hat{COB} = 60^\circ, AC = CB = \frac{S}{2}$$

چون $\hat{OBC} = 30^\circ$ ، پس داریم:

$$OC = \frac{OB}{2} = \frac{x}{2}$$

از هندسه‌ی مسطحه می‌دانیم که «هرچه فاصله‌ی وتر از مرکز دایره بیش‌تر شود طول وتر کوچک‌تر خواهد شد. پس وترهایی که طولشان بزرگ‌تر از $\frac{S}{2}$ است، بایستی فاصله‌ی نقطه‌های وسط آن‌ها تا مرکز دایره کم‌تر از $\frac{x}{2}$ باشد. ناحیه‌ی فوقیت r و فضای نمونه‌ای در شکل ۱۳ نشان داده شده‌اند. احتمالی که به دنبال آن هستیم برابر مساحت دایره‌ای به شعاع $\frac{x}{2}$ بخش بر مساحت دایره‌ای به شعاع x است. در نتیجه:



شکل ۱۳

$$P(r) = \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\pi x^2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

وقت آن است که بار دیگر روی چند مسئله کار کنید.

۱- یک قرص (دیسک) به قطر a روی یک میز که با خطوط موازی به فاصله‌ی b از یک‌دیگر تقسیم‌بندی شده پرتاب می‌کنیم. در این جا $a < b$ است. احتمال اینکه قرص با یکی از خط‌ها تلاقی داشته باشد را محاسبه کنید. (جواب: $\frac{a}{b}$).

۲- مسئله‌ی شلیک به بوقلمون. یک دهکده، مسابقه‌ی سالانه شکار بوقلمون دارد به این صورت که یک صفحه‌ی هدف دایره‌ای به قطر ۱ اینچ به دیوار چسبانده شده است. هر مسابقه‌دهنده‌ای یک ۲۵ تومانی برای هر شلیک می‌پردازد و اگر حفره‌ی ایجاد شده توسط گلوله کاملاً داخل صفحه‌ی هدف واقع شود یک بوقلمون جایزه می‌گیرد. یک مسابقه دهنده به طور تصادفی به سمت هدف آتش می‌کند و حفره‌ای به قطر $\frac{1}{4}$ اینچ روی دیوار ایجاد می‌کند. اگر شلیک او به هدف برخورد کند احتمال بُردن یک بوقلمون چه قدر است؟ (جواب: $\frac{9}{16}$)

۳- در مسئله‌ی ایجاد حریق عمدی تغییر زیر را ایجاد کرده و سپس احتمال موردنظر را محاسبه کنید:

اگر فاصله‌ی نقطه‌های تقاطع میله با دایره بیشتر از (الف) شعاع، (ب) ضلع یک مربع محاطی،

(ب) b که طول مستطیل محاطی است، (ت) طول ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 30° وقتی مثلث محاطی دارای زاویه‌های 90° ، 60° و 30° است، باشد. آنگاه مدت محکومیت فقط 1 سال است.

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \quad (\text{جواب:})$$

۴- مسئله‌ی زندان را با فرض این که درجه‌های پنجره‌ها به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به

ضلع s و پهنای میله‌ها c و قطر توپ a به‌طوری که $\frac{8\sqrt{3}}{3} < a < \frac{8\sqrt{3}}{3} + c$ حل کنید.

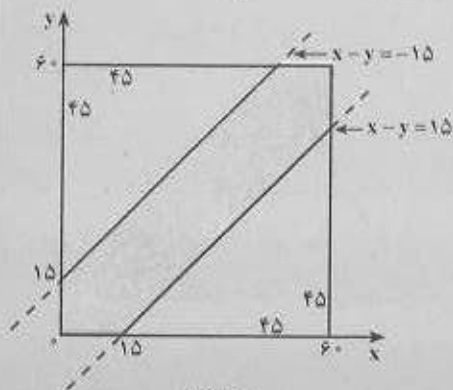
۴- کاربردهای درگیر با دستگاه مختصات

برای مسئله‌های بعدی، نیازمند استفاده از دستگاه مختصات (یک یا دوبعدی) جهت ساختن

نمایشی برای فضای نمونه‌ای و پیش‌آمد موفقیت‌آمیز هستیم.



مسئله‌ی روبرو شدن زن و شوهر: زن و شوهری قرار می‌گذارند که هنگام خرید از بازار همدیگر را بین ساعت ۴ تا ۵ بعد از ظهر در قسمت مشخصی از خیابان ببینند. قرار آن‌ها به این صورت بود که هرکدام که اول رسیدند ۱۵ دقیقه منتظر دیگری بمانند و بعد از پانزده دقیقه به خرید خودش ادامه دهد. با فرض اینکه زمان ورود هرکدام به‌طور تصادفی در طول یک ساعت رخ دهد، احتمال این که این زوج یک‌دیگر را ملاقات کنند چه قدر است؟
حل: فرض می‌کنیم x و y به ترتیب، تعداد دقیقه‌های بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر باشد که شوهر و زن به محل قرار می‌رسند. زمان‌های ورود مربوط به زن و شوهر را می‌توانیم به وسیله‌ی زوج‌های مرتب (x, y) به‌طوری که $0 \leq x < 60$ ، $0 \leq y < 60$ نمایش دهیم. عضوهای فضای نمونه، نقاط داخل



شکل ۱۴

مربعی به ضلع 60 خواهند بود (شکل ۱۴). برای این که بتوانند همدیگر را ملاقات کنند، باید زمان‌های ورودشان در فاصله‌ی زمانی ۱۵ دقیقه از یک‌دیگر رخ دهد. این مشاهده به صورت نمادین به وسیله‌ی نامساوی قدرمطلق $|x - y| < 15$ نشان داده می‌شود. (برای مثال اگر زن ۱۴ دقیقه بعد از شوهرش برسد، همدیگر را ملاقات می‌کنند. برای دیدن این مطلب، توجه می‌کنیم که $x - y = -14$ ،

در نتیجه $|x-y|=14$ و لذا نامساوی برقرار است.)

نمودار $|x-y| < 15$ محصور در داخل فضای نمونه‌ای، ناحیه‌ی موفقیت را تشکیل می‌دهد. ناحیه‌ی هاشورخورده موفقیت r و فضای نمونه‌ای R در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. بنابراین،

$$P(r) = \frac{602 - \left[\frac{1}{4}(45)^2 + \frac{1}{4}(45)^2 \right]}{602} = \frac{3600 - 2025}{3600} = \frac{1575}{3600} \approx 0.44$$

مسئله‌ی شناکردن: یک شناگر در هوای مه‌آلود از کنار ساحل شنا کردن را آغاز می‌کند و در

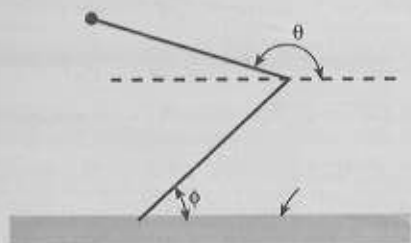


یک جهت تصادفی به‌طور مستقیم 50° یارد را طی می‌کند. او پس از قرارگرفتن در مسیر تصادفی، چند بار شناکردن را متوقف می‌کند و به اطراف می‌چرخد ولی بازهم نمی‌تواند زمین (خشکی) را ببیند. با فرض

این که خط ساحلی مستقیم و جزر و مدی نباشد، احتمال این که این شناگر قبل از پیمودن 50° یارد دیگر به ساحل برسد، چه قدر است؟

حل: موقعیت نهایی شناگر به وسیله‌ی انتخاب

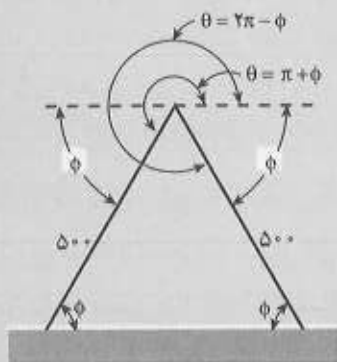
زاویه‌های θ و به‌طوری که $0^\circ < \theta < 2\pi$ و $0^\circ < \phi < \pi$ همان گونه که در شکل ۱۵ می‌بینید تعیین می‌شود.



شکل ۱۵

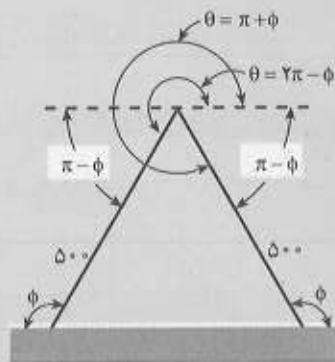
در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ مشاهده می‌شود که اگر

$$0^\circ < \phi < \frac{\pi}{4}, \quad \pi + \phi < \theta < 2\pi - \phi$$



$$0^\circ < \phi < \frac{\pi}{4}$$

شکل ۱۷

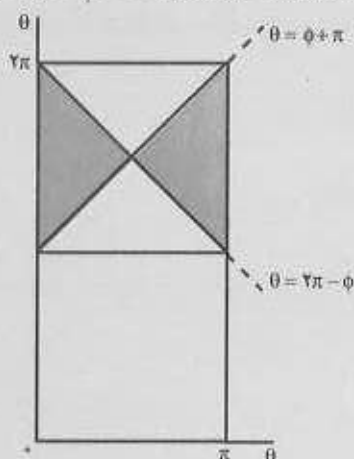


$$\frac{\pi}{4} < \phi < \pi$$

شکل ۱۶

شناگر به ساحل می‌رسد. $\frac{\pi}{4} < \theta < \pi$, $2\pi - \theta < \theta < \pi + \theta$

می‌توان فضای نمونه‌ای R آزمایش را به وسیله‌ی ناحیه‌ی مستطیل شکل $\{(\theta, \phi) : 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ نمایش داد. این ناحیه و ناحیه‌ی رنگ شده موقت ۲ در شکل ۱۸ نشان داده شده‌اند. مساحت ناحیه‌ی مستطیل شکل که تمام فضای نمونه‌ای را نشان می‌دهد برابر



شکل ۱۸

با $2\pi^2 \times (2\pi) = 4\pi^3$ و مساحت ناحیه‌ی موقت $\frac{\pi^2}{4}$ است. بنابراین:

$$P(r) = \frac{\text{مساحت } r}{\text{مساحت } R} = \frac{\pi^2/4}{4\pi^3} = \frac{1}{4}$$

در پایان، شما را به تلاش جدی در حل مسئله‌هایی از این نوع دعوت می‌کنیم.

۵- مسئله‌هایی برای مدل‌سازی

۱- شناگری از کنار ساحل در مسیری که با خط ساحلی زاویه‌ی 75° می‌سازد شروع به شنا کرده و 40 متر شنا می‌کند و سپس در یک جهت تصادفی به شناکردن ادامه می‌دهد. احتمال این‌که شناگر قبل از 40 متر شناکردن، 50 متر شناکردن، 39 متر شناکردن و 38 متر شناکردن به ساحل برسد چه قدر است؟ (راهنمایی: از قانون سینوس‌ها استفاده کنید)، (جواب: $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{22}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$)

۲- دوباره مسئله‌ی روبرو شدن زن و شوهر را بخوانید. احتمال این‌که زمان رسیدن شوهر به زمان رسیدن زن، نزدیکتر از ساعت ۴ بعد از ظهر باشد چه قدر است؟

۳- برای معادله‌ی $ax + b = 0$ ، ضریب a به‌طور تصادفی از اعداد فاصله‌ی $[1, 2]$ و ثابت b

نیز به طور تصادفی از اعداد فاصله‌ی $[۱, ۱-]$ انتخاب شده است. احتمال این که جواب معادله بزرگتر از $۲۵/۰$ باشد چه قدر است؟ (جواب $\frac{۵}{۱۶}$)

۴- یک پلیس محلی، بزرگراه شماره‌ی ۸ را از قرارگاه پلیس محلی تا شهری واقع در شرق گشت می‌زند. پلیس دیگری بزرگراه شماره‌ی ۸ را از قرارگاه پلیس تا شهری واقع در غرب گشت می‌زند. قرارگاه پلیس در وسط راه بین دو شهر واقع شده است و فاصله‌ی این دو شهر ۸۰ کیلومتر است. با فرض این که اتومبیل‌های گشت در هر جای حوزه‌ی استحفاظی خود در هر زمان داده شده بتوانند حاضر باشند، احتمال اینکه دو ماشین گشت دست‌کم ۲۰ کیلومتر از یکدیگر فاصله داشته باشند چه قدر است؟ (جواب $\frac{۷}{۸}$)

۵- یک تاجر منتظر دو تلفن است که به او زده شود. به همان اندازه که احتمال دارد علی در فاصله‌ی زمانی بین ۲ تا ۴ بعد از ظهر تلفن بزند، به همان اندازه هم احتمال دارد که رضا در فاصله‌ی زمانی بین ساعت ۳:۰۰ تا ۳:۳۰ بعد از ظهر تلفن بزند. احتمال در حالت‌های زیر چه قدر است؟
(الف) علی قبل از رضا تلفن بزند.

(ب) فاصله‌ی تلفن‌ها کمتر از ۱۰ دقیقه باشد.

(پ) علی اول تلفن بزند، فاصله‌ی تلفن‌ها کمتر از ۱۰ دقیقه باشد و هر دو تلفن قبل از ساعت ۳ بعد از ظهر باشد. (جواب $\frac{۷}{۱۶}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۱۸}$)

۶- مسئله‌ی اشتراک دو منحنی. فرض کنید u را به طور تصادفی از $[۰, ۲]$ و v را نیز به طور تصادفی از $[۰, ۲]$ انتخاب کنیم. احتمال این که دایره‌ی $x^2 + y^2 = u^2$ هذلولی $xy = v^2$ را

قطع کند (شکل ۱۹) چه قدر است؟

(راهنمایی: همزمان دو معادله را بر حسب

x حل کنید و یک نامساوی برای u و v

به دست آورید و سپس تفاوت‌ها را شناسایی

کرده تحلیل نمایید. (جواب: $\frac{3\sqrt{2}-4}{4}$)

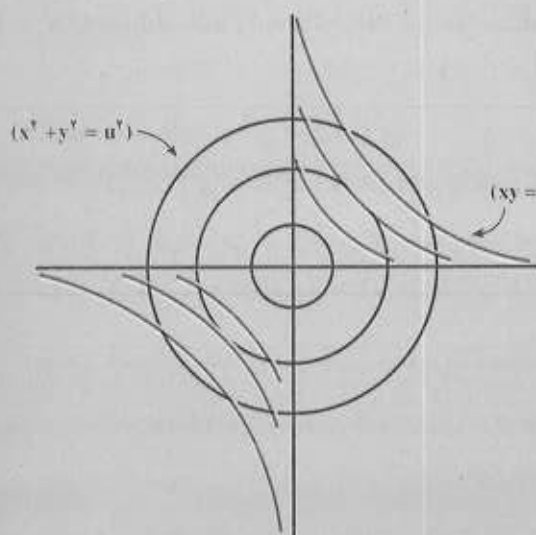
یک گردایه از مسایل احتمال

هندسی که از نظر درجه‌ی سختی مشابه

این مسائل می‌باشند در منبع [۳] موجود

است. برای مسئله‌های مبارز طلب منبع

[۲] را ببینید.



1. Roulette wheel

2. Dart board

3. Federal Bureau of Investigation

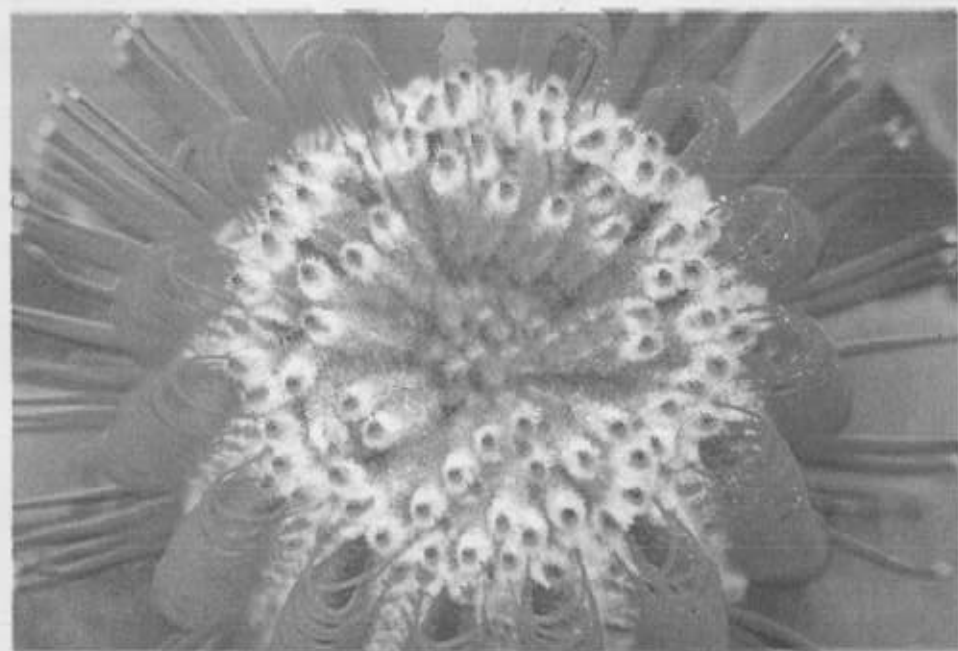
۶- منابع

REFERENCES

- [1]. Gnedenko, Boris V. *The Theory of Probability*. New York: Chelsea Publishing Co., 1967.
- [2]. Mosteller, F. R. *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1965.
- [3]. Dahlke, Richard, and Robert Fakler. "Geometrical Probability. :In *Teaching Statistics and Probability*, 1981 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 143-153. Reston, Va.: The Council, 1981.

BIBLIOGRAPHY

- [1]. Dahlke, Richard, and Robert Fakler. "Applications of High School Mathematics in Geometrical Probability. " *UMAP Module 660*, 34 pp. Arlington, Mass: Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP). (Note: This article is also reprinted in COMAP's *Journal of Undergraduate Mathematics and Its Applications* 6 (No. 1, 1985): 57-94; and in *UMAP Modules: Tools for Teaching* 1985, pp. 247-84.)
- [2]. Woodward, Ernest, and Larry Hoehn. "Probability in High School Geometry. " In *Learning and Teaching Geometry*. K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 175-83. Reston, Va.: The Council, 1987.



این همه نقش عجب بر در و دیوار وجود

...

