

دفاعیه یک ریاضیدان*

گادفری هرلد هاردی
ترجمه سیامک کاظمی

نام گادفری هرلد هاردی، ریاضیدان بزرگ انگلیسی در نیمه اول قرن بیستم، برای بیشتر علاقه‌مندان ریاضیات نام آشنایی است. او در زمینه تقریبهای دیوفانتی، مسأله وارینگ، سریهای فوریه، نظریه متغیرهای مختلط و حقیقی، تابع زتای ریمان، و توزیع اعداد اول تحقیقات اساسی کرده است. یکی از جنبه‌های جالب شخصیت هاردی، عقاید خاص و بحث‌انگیز او درباره ریاضیات است. هاردی به ریاضیات فارغ از کاربردهای عملی آن و به عنوان هنری متعالی می‌نگرد. از نظر او، ریاضیدانان بزرگ خالقان آثار هنری هستند، آثاری که فی‌نفسه ارزش ماندگار دارند. بخشی از عقاید هاردی در کتابی که او در شصت سالگی با عنوان *دفاعیه یک ریاضیدان* نوشت، آمده است. گراهام گرین نویسنده معروف انگلیسی این کتاب را "بهترین توصیف از کار یک هنرمند خلاق" خوانده است. بسیاری از ریاضیدانان با دیدگاههای هاردی موافق نیستند و ضمناً، با گذشت زمان حتی قسمتهایی از نظریه اعداد که به نظر او "ریاضیات واقعی ولی فاقد فایده عملی" بودند، کاربرد عملی پیدا کرده‌اند. با این حال، کتاب کوچک هاردی به عنوان اثری کلاسیک که حاوی نگرش خاصی به ریاضیات است، همچنان اهمیت خود را حفظ کرده است. در اینجا ترجمه گزیده‌ای از مطالب این کتاب را می‌خوانید.

نقشهای ریاضیدان، همچون نقشهای نقاش یا شاعر، باید زیبا باشند. ایده‌های ریاضی باید همچون رنگهای نقاشی یا واژه‌های شعر به گونه‌ای هماهنگ به هم پیوندند. نخستین محک، زیبایی است. ریاضیات زشت در این جهان مقام ماندگاری ندارد. در اینجا باید درباره سوء تفاهمی صحبت کنم که هنوز هم رایج است (گرچه، احتمالاً کمتر از بیست سال پیش) و وایتهد آن را "خرافه ادیبانه" نامیده است؛ یعنی این سوء تفاهم که عشق به ریاضیات و درک زیبایی آن "نوعی جنون است منحصر به معدودی افراد غیرعادی در هر نسل".

در حال حاضر، به سختی می‌توان فرد تحصیلکرده‌ای یافت که نسبت به جاذبه زیبایی شناختی ریاضیات هیچ احساسی نداشته باشد. ممکن است تعریف زیبایی ریاضی بسیار دشوار باشد، ولی تعریف هر نوع زیبایی همین قدر دشوار است - ممکن است به طور دقیق ندانیم که منظورمان از شعر زیبا چیست، ولی این دلیل نمی‌شود که شعر زیبا را هنگام خواندن آن تشخیص ندهیم. حتی پروفیسور هاگبن^۱، که می‌خواهد به هر قیمتی اهمیت جنبه زیبایی شناختی ریاضیات را به حداقل برساند، چنان جسارتی ندارد که واقعیت آن را انکار کند: "مسلماً افرادی هستند که ریاضیات برای آنها جاذبه

ریاضیدان، مانند نقاش یا شاعر، نقش پرداز است. ولی نقشهای او ماندگارترند چون از ایده ساخته می‌شوند. نقاش نقشهای خود را با شکل و رنگ می‌سازد، و شاعر یا کلام. تا بلو نقاشی ممکن است "ایده"ای را مجسم کند، ولی معمولاً این ایده پیش پا افتاده و کم‌اهمیت است. در شعر ایده‌ها بیشتر به حساب می‌آیند ولی، همچنانکه هاوسمن^۲ با تأکید می‌گفت، در اهمیت ایده در شعر مبالغه می‌شود: "نمی‌توانم قبول کنم که چیزی به عنوان ایده شعری وجود دارد... شعر آن چیزی نیست که گفته می‌شود بلکه شیوه‌ای است که برای گفتن آن چیز به کار می‌رود."

گلیم بخت کسی را که بیاftند سیاه
به آب زمزم و کوثر سفید نتوان کرد^۳

آیا این شعر زیبا نیست؟ و در عین حال، آیا ایده‌هایش نازل و دروغین نیستند؟ به نظر می‌رسد که فقر ایده تأثیر چندانی بر زیبایی نقش لفظی ندارد. از طرف دیگر، ریاضیدان ابزارکاری در دست ندارد مگر ایده، و بنا بر این نقشهای او احتمالاً بیشتر می‌پایند زیرا ایده دیرتر از کلمه کهنه می‌شود.

۱. آلفرد ادوارد هاوسمن (Alfred Edward Housman) استاد ادبیات کلاسیک و شاعر انگلیسی

۲. برای اینکه نظر نویسنده بهتر القا شود، شعر فارسی آورده شد [م].

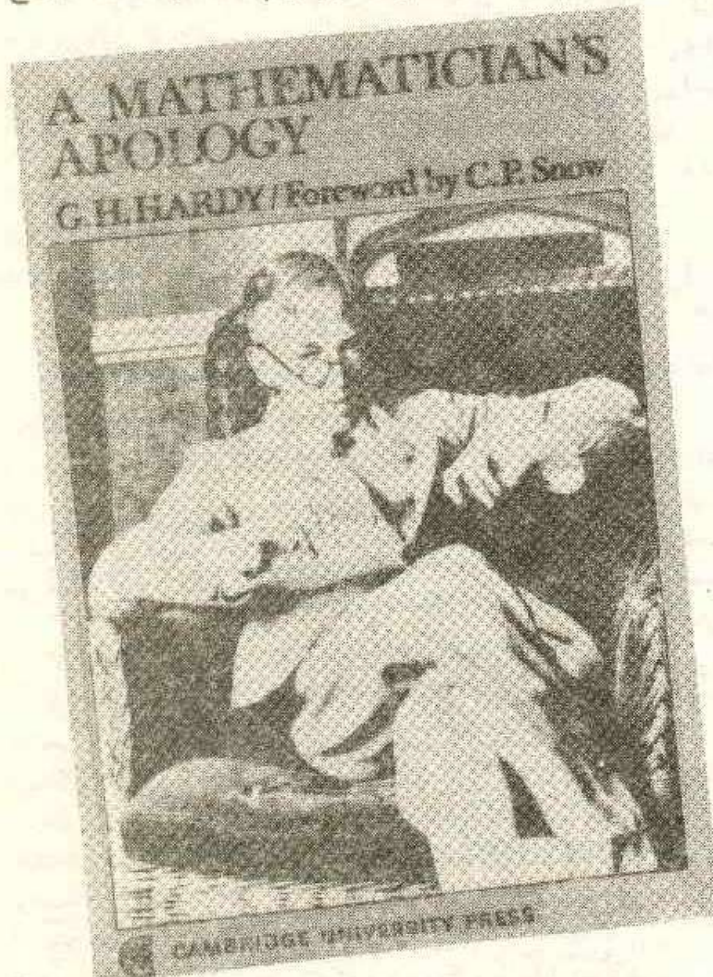
۳. لسلت هاگبن (Lancelot Haggben) دانشمند و نویسنده انگلیسی

واقعاً متعلق به خود اوست).

* * *

مسأله شطرنج، نمونه‌ای از ریاضیات اصیل است، اما ریاضیاتی که از جهتی "نازل" است. حرکات بازی هر قدر استادانه و پیچیده و هراتدازه اصیل و شگفت آور باشد، باز هم این مسأله کمبودی اساسی دارد. مسائل شطرنج هم نیستند. بهترین مسائل ریاضی، زیبا و در عین حال جدی می‌باشند. اگر دوست دارید به جای این لغت می‌توان "مهم" را به کار برد، ولی واژه "مهم" بسیار مبهم است و همان "جدی" منظور را بهتر می‌رساند.

من به نتایج "عملی" ریاضیات تمی اندیشم. به این نکته باید بعداً برگردم. در حال حاضر فقط می‌گویم که اگر مسأله شطرنج



در نظر اول بیفایده است، بهترین مسائل ریاضی نیز اکثراً به همان اندازه بیفایده‌اند. قسمت بسیار کوچکی از ریاضیات فایده عملی دارد که آن قسمت هم نسبتاً ملال‌آور است. "جدی بودن" یک قضیه ریاضی در نتایج عملی آن، که معمولاً ناچیزند، نیست بلکه در ضمن آن ایده‌های ریاضی است که به وسیله آن قضیه به هم می‌پیوندند. به طور کلی می‌توان گفت یک ایده ریاضی در صورتی "پرمضمون" است که بتواند به شکلی طبیعی و روشن‌گر با دسته بزرگی از ایده‌های ریاضی دیگر در ارتباط قرار گیرد. بنابراین، یک قضیه جدی ریاضی، قضیه‌ای که ایده‌های پرمضمون را به هم مربوط می‌سازد، محتمل است که سبب پیشرفت‌های مهمی در خود ریاضی و یا حتی در علوم دیگر شود. هیچ مسأله شطرنجی

بیروح و سردی دارد... جذابیت زیبایی‌شناختی ریاضیات ممکن است برای عده معدودی بسیار واقعی باشد. ولی به نظر او، این عده "معدود"ند و احساس "سردی" دارند (و واقعاً آدم‌های مضحکی هستند که از هوای تازه فضای باز و وسیع به شهرهای کوچک و مزخرف دانشگاهی پناه برده‌اند) او در اینجا، همان "خرافه ادیبانه"ای را که وایتهد ذکر کرده است، تکرار می‌کند.

واقعیت این است که تنها معدودی از رشته‌ها "عامه‌پسند"تر از ریاضی هستند. بیشتر مردم همان‌طور که از یک آهنگ دلدیر لذت می‌برند، زیبایی ریاضی را نیز درک می‌کنند. و احتمالاً تعداد دلستان ریاضی بیشتر از دوست‌دازان موسیقی است. ممکن است ظواهر امر برخلاف این حکم کنند ولی توجیهات ساده‌ای [برای این گفته] وجود دارد. از موسیقی می‌توان برای تحریک احساسات و عواطف توده مردم استفاده کرد ولی از ریاضی نمی‌توان؛ و ناتوانی در درک موسیقی (بحق) یک امتیاز منفی محسوب می‌شود، در حالی که بیشتر مردم طوری از نام ریاضی می‌ترسند که حاضرند خیلی ساده در کند ذهنی خود در ریاضیات مبالغه کنند.

با اندکی تأمل روشن می‌شود که "خرافه ادیبانه" نامعقول است. در هر کشور متمدن، تعداد بسیار زیادی شطرنج باز وجود دارد - در روسیه، تقریباً همه تحصیل‌کردگان شطرنج بازند؛ و هر بازیکن شطرنج می‌تواند یک بازی یا مسأله "زیبا" را تشخیص دهد و درک کند، در حالی که مسأله شطرنج چیزی نیست بجز تمرینی در ریاضیات محض (البته بازی شطرنج، به دلیل آنکه جنبه‌های روانشناختی نیز در آن نقش دارند، کاملاً ریاضی نیست)، و هر کسی که یک مسأله شطرنج را "زیبا" می‌نامد در واقع از زیبایی ریاضی تمجید می‌کند، گریم این زیبایی از نوع نسبتاً نازلی باشد. همین امر را می‌توان در سطحی پایستر، اما در مورد جمعیتی بیشتر، از بازی بریج دریافت، و اگر از آن هم پایستر بیاییم، از بخش معما در روزنامه‌های پرفروش. تقریباً تمامی محبوبیت عظیم این گونه بازیها، در حکم ستایشی است از قدرت استخراج مطلب از ریاضیات مقدماتی، و بهترین طراحان معما از قبیل دادنی و کالین به قدرت از چیزی بجز ریاضیات استفاده می‌کنند. آنها حرفه خود را می‌شناسند؛ آنچه مردم می‌خواهند، "تلنگر"ی است که به ذهن زده شود و هیچ چیزی نمی‌تواند به خوبی ریاضیات این کار را انجام دهد.

اضافه می‌کنم که هیچ چیزی در دنیا حتی برای افراد مشهور (و افرادی که به زبان تحقیر آمیزی در باره ریاضیات سخن گفته‌اند) دلدیرتر از کشف یا کشف مجدد یک قضیه ناب ریاضی نیست. هربرت اسپنسر^۱ در زندگینامه خود قضیه‌ای در باره دایره‌ها آورده که در بیست سالگی اثبات کرده بوده است (بدون اینکه بداند آن قضیه بیش از دوهزار سال قبل به وسیله افلاطون اثبات شده است). کار پرفسور سادی^۲ مثال جدیدتری و جالبتری است (ولی قضیه او

۱. هربرت اسپنسر (Herbert Spencer) فیلسوف انگلیسی

۲. فردریک سادی (Frederick Saddy) شیمی‌دان انگلیسی

باشد، می تواند هم قضایا و هم اثبات آنها را ظرف يك ساعت بفهمد.

۱. اولین اثبات، برهان اقلیدس^۱ برای وجود بینهایت عدد اول است.

اعداد اولی اعدادی هستند به صورت

(الف) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots$

که نمی توانند به عوامل کوچکتر از خود تجزیه شوند^۲. مثلاً 37 و 317 هم اول اند. اعداد غیر اول را می توان از اعداد اول به وسیله عمل ضرب ساخت: $2 \times 3 \times 3 \times 37 = 666$. هر عددی که خودش اول نباشد حداقل بريك (و معمولاً بر چند) عدد اول قابل قسمت است. باید ثابت کنیم که تعداد اعداد اول نامتناهی است یعنی رشته اعداد (الف) هیچگاه پایان نمی پذیرد. فرض کنیم که این رشته اعداد پایانی داشته باشد و به شکل زیر باشد:

$$2, 3, 5, \dots, P$$

(در این صورت، P بزرگترین عدد اول است)؛ براساس این فرض، عدد Q را در نظر می گیریم که به وسیله فرمول زیر تعریف می شود:

$$Q = (2 \times 3 \times 5 \times \dots \times P) + 1$$

واضح است که Q بر هیچ يك از اعداد $2, 3, 5, \dots, P$ قابل قسمت نیست زیرا تقسیم آن بر هر يك از این اعداد دارای باقیمانده ۱ است. ولی اگر Q خودش اول نباشد، بر عددی اول قابل قسمت است و بنابراین عدد اولی (که ممکن است خود Q باشد) وجود دارد که بزرگتر از همه این اعداد است. این با فرض ما، مبنی بر اینکه عدد اولی بزرگتر از P موجود نیست، مغایر است؛ بنابراین، فرض ما غلط است.

این اثبات به روش بوهان خلف است و برهان خلف، که اقلیدس آن را بسیار دوست داشت، یکی از بهترین سلاحهای ریاضیدان است^۳. این نوع گامی، بسیار جالبتر از گامی در بازی شطرنج است؛ بازیکن شطرنج ممکن است يك پیاده یا حتی يك مهره را قربانی کند ولی ریاضیدان بازی را قربانی می کند.

۲. مثال دوم، من، اثبات فیثاغورس از "گنگ بسودن"^۴ $\sqrt{2}$ است.

"عددگویا" کسری است به صورت a/b ، که a و b اعدادی صحیح اند. می توانیم فرض کنیم a و b عامل مشترکی ندارند، چون اگر داشته باشند می توانیم آن را از صورت و مخرج حذف

۱. اصول مقاله پنجم، قضیه ۲۵. منشأ واقعی بسیاری از قضایای اصول نامعلوم است، ولی دلیل خاصی نداریم که فکر کنیم این قضیه متعلق به خود اقلیدس نیست.

۲. عدد ۱ به دلایل فنی عدد اول به حساب نمی آید.

۳. اثبات را می توان طوری ترتیب داد که از برهان خلف اجتناب شود و منطقین ویر و پادهای از مکاتب چنان اثباتی را ترجیح می دهند.

در پیشرفت کلی تفکر علمی تأثیری نداشته است ولی فیثاغورس، نیوتن، و اینشتین، هر يك در عصر خویش جهت تفکر علمی را تغییر داده اند.

البته، جدی بودن يك قضیه در پیامدهایش نیست؛ این پیامدها صرفاً می توانند گواه جدی بودن قضیه باشند. شکسپیر تأثیر عظیمی در توسعه زبان انگلیسی داشته است و آتوی تقریباً هیچ تأثیری نداشته است ولی دلیل آنکه شکسپیر شاعر بهتری است، این نیست. شکسپیر به این دلیل بهتر است که اشعار بسیار بهتری سروده است. کم ارزشی مسأله شطرنج، نظیر کم ارزشی شعر آتوی، نه از پیامدهایش که از محتوایش منشأ می گیرد.

نکته دیگری هست که فقط اشاره کوتاهی به آن می کنم و می گذرم؛ نه به این دلیل که جالب نیست بلکه به این علت که مسأله دشواری است و من صلاحیتی برای بحث جدی در زیبایی شناسی ندارم. زیبایی يك قضیه ریاضی تا اندازه زیادی به جدی بودن آن بستگی دارد. همان گونه که حتی در شعر، زیبایی يك بیت ممکن است تا حدی به مضمونی که در بر دارد بستگی داشته باشد. قبلاً يك بیت شعر را به عنوان مثالی از زیبایی خالص يك نقش لفظی نقل کردم ولی قطعه زیر از آن هم زیباتر به نظر می رسد.

شب تاریک و بیم موج و کردابی چنین حائل
کجا دارند حال ما سبکپاران ساحلها

این نقش همان قدر لطیف است اما در اینجا ایده ها پرمعنی هستند و مضمون شعر واقعیت است، از این رو احساسات ما عمیقتر تحت تأثیر قرار می گیرد. پس حتی در شعر، ایده ها اهمیت دارند و طبیعتاً در ریاضیات بسیار بیشتر مطرح اند؛ اما نمی خواهم درباره این مسأله به طور جدی بحث کنم.

* * *

اکنون روشن است که برای ادامه بحث باید مثالهایی از قضایای "واقعی" ریاضی ارائه دهم که هر ریاضیدانی آنها را تراز اول بداند. در اینجا محدودیتهایی در کار است که انتخاب را دشوار می سازد. از طرفی، مثالهای من باید ساده و برای خواننده ای که هیچگونه اطلاعات تخصصی ریاضی ندارد قابل فهم باشند، به مقدمات مقصلی نیاز نداشته باشند و خواننده بتواند اثباتها و توضیحات را تعقیب کند. این شرطها، مثلاً، بسیاری از زیباترین قضایای نظریه اعداد از قبیل قضیه "دومربع" فرما و قانون تقابل مربعی را از بحث ما خارج می کنند. از طرف دیگر، مثالهای من باید از ریاضیات "تمام عیار" انتخاب شوند یعنی ریاضیاتی که ریاضیدانان حرفه ای با آن سروکار دارند و این شرط، تعداد زیادی از قضایا را که بیان آنها به صورت قابل فهم خواننده آسان است ولی بر موازین منطق و فلسفه ریاضی منطبق نیستند، از گود خارج می کند.

من کاری بهتر از این نمی توانم بکنم که به ریاضیات یونانی برگردم. دو تا از قضایای مشهور ریاضیات یونان را بیان و اثبات می کنم. این دو قضیه، هم از لحاظ ایده و هم از لحاظ اثبات، قضایای "ساده" ای هستند، ولی بدون هیچ تردیدی در بالاترین سطح قرار دارند. گذشت دوهزار سال چین و چروکی بر چهره آنها نشانده است؛ و بالاخره، خواننده باهوش حتی اگر زمینه ریاضی اش ضعیف

تقسیم کرد؛ دسته اول اعداد

$$۵, ۱۳, ۱۷, ۲۹, ۳۷, ۴۱, \dots$$

که باقیمانده تقسیم آنها بر ۴، عدد يك است، و دسته دوم اعداد

$$۳, ۷, ۱۱, ۱۹, ۲۳, ۳۱, \dots$$

که باقیمانده تقسیم آنها بر ۴، عدد سه است. هر يك از اعداد دسته اول را می توان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت:

$$۵ = ۱^2 + ۲^2, \quad ۱۳ = ۲^2 + ۳^2$$

$$۱۷ = ۱^2 + ۴^2, \quad ۲۹ = ۲^2 + ۵^2$$

و هیچ يك از اعداد دسته دوم را نمی توان به صورت مجموع مربعات دو عدد صحیح نوشت. مثلاً ۱۱، ۷، ۳، ۱۹ به این طریق قابل بیان نیستند. متأسفانه نمی توان اثباتی برای این قضیه ارائه کرد که برای کسی که ریاضیدان نسبتاً متبحری نباشد، قابل درك باشد.

همچنین قضایای زیبایی در نظریه مجموعه ها داریم از قبیل قضیه کانتور درباره "شمارش ناپذیری" پیوستار. در اینجا مشکلی در جهت مخالف وجود دارد. اثبات قضیه، اگر کسی بر زبان آن مسلط باشد به اندازه کافی آسان است اما توضیح زیادی لازم است تا مفهوم قضیه روشن شود. بنابراین، سعی نمی کنم مثالهای دیگری بیاورم. مثالهایی که آورده ام، آزمونهایی برای خواننده هستند؛ اگر او نتواند آنها را بفهمد، احتمال نمی رود که هیچ چیزی را در ریاضیات بفهمد.

گفتم که ریاضیدان نقشهایی از ایده ها می پردازد، و این نقشها باید با محك زیبایی و محك جدی بودن سنجیده شوند. نمی توانم باور کنم که کسی این دو قضیه را فهمیده باشد و نپذیرد که هر دو از این آزمونها سر بلند بیرون می آیند. اگر این دو قضیه را با زیرکانه ترین معماهای دادنی یا زیباترین مسائل شطرنج که استادان آن هنر پرداخته اند، مقایسه کنیم، برتری آنها از هر دو لحاظ واضح است: تفاوت مرتبه آنها آشکار و قاطع است. آنها بسیار جدی تر و بسیار زیباترند؛ آیا می توانیم با دقت بیشتری مشخص کنیم که برتری آنها در چیست؟

* * *

در وهله اول، برتری این قضایای ریاضی از لحاظ جدی بودن، آشکار و قاطع است. مسأله شطرنج حاصل ترکیب هوشمندانه ای از ایده ها در مقیاسی محدود است، ایده هایی که تفاوت اصولی با یکدیگر ندارند و بازتاب خارجی نیز ندارند. اگر شطرنج اختراع نمی شد، شیوه تفکر ما فرقی نمی کرد، در حالی که قضایای اقلیدس و فیثاغورس تأثیر عمیقی بر تفکر بشر داشته اند، حتی در خارج از ریاضیات.

قضیه اقلیدس برای کل ساختار حساب اهمیت حیاتی دارد. اعداد اول مواد خامی هستند که با استفاده از آنها علم حساب را می سازیم، و قضیه اقلیدس به ما اطمینان می دهد که برای این کار مواد فراوانی در اختیار داریم. اما قضیه فیثاغورس کاربردهای گسترده تری دارد و زمینه ساز مبحث پربارتری است.

ابتدا باید توجه کرد که استدلال فیثاغورس قابلیت تعمیم بسیار

کنیم. اینکه بگوییم " $\sqrt{2}$ گنگ است"، معادل است با اینکه بگوییم ۲ را نمی توان به صورت $(a/b)^2$ نوشت و این هم معادل است با اینکه گفته شود که رابطه

$$a^2 = 2b^2 \quad (ب)$$

نمی تواند به ازای مقادیر صحیح a و b که عامل مشترکی ندارند برقرار باشد. این گفته، قضیه ای در حساب محض است که به هیچ معلوماتی از "اعداد گنگ" نیازمند نیست و به هیچ نظریه ای درباره ماهیت آنها بستگی ندارد.

در اینجا هم به روش پرهان خلف استدلال می کنیم. فرض می کنیم (ب) برقرار باشد که در آن، a و b اعداد صحیح بدون عامل مشترك هستند. از (ب) نتیجه می شود که a^2 زوج است (زیرا $2b^2$ بر ۲ قابل قسمت است) و بنابراین a زوج است (زیرا مجذور يك عدد فرد، فرد است). اگر a زوج باشد آنگاه به ازای يك مقدار صحیح c ,

$$a = 2c \quad (پ)$$

و بنابراین

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

یا

$$b^2 = 2c^2 \quad (ت)$$

از اینجا b^2 زوج است و بنابراین (به همان دلایلی که در بالا گفته شد) b زوج است یعنی a و b هر دو زوج اند و دارای عامل مشترك ۲ هستند. این با فرض متناقض است، و بنابراین فرض ما غلط است. از قضیه فیثاغورس نتیجه می شود که قطر يك مربع با ضلع آن ناموافق است (یعنی نسبت آنها يك عدد گویا نیست، و به عبارت دیگر، هیچ واحد طولی وجود ندارد که هر دو، مضارب صحیحی از آن باشند) زیرا اگر طول ضلع را واحد طول بگیریم و طول قطر را d بنامیم، بنا به قضیه معروفی که آن هم منسوب به فیثاغورس است، داریم

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

بنابراین d نمی تواند يك عدد گویا باشد.

می توانم تعداد دیگری از قضایای جالب نظریه اعداد را ذکر کنم که مفهوم آنها را هر کسی می تواند درك کند. مثلاً، قضیه ای داریم موسوم به "قضیه اسامی حساب" که می گوید هر عدد صحیح فقط به يك صورت به حاصلضرب اعداد اول قابل تجزیه است. مثلاً $۲ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۷ = ۶۶۶$ و این عدد به هیچ صورت دیگری تجزیه پذیر نیست؛ غیر ممکن است که $۶۶۶ = ۲ \times ۱۱ \times ۲۹$ یا $۶۶۶ = ۱۷ \times ۲۳ = ۱۳ \times ۸۹$ (این نکته را می توان بدون انجام عمل ضرب ملاحظه کرد). این قضیه، چنانکه از نامش برمی آید، اساس حساب عالی است ولی اثبات آن، گرچه "مشکل" نیست، به مقدماتی نیاز دارد و ممکن است برای خواننده ای که اهل ریاضیات نیست، خسته کننده باشد.

قضیه مشهور و زیبای دیگر، قضیه "دو مربع" فرماست. می توان اعداد اول را (اگر عدد اول خاص ۲ را ندیده بگیریم) به دو دسته

زیرا او با تقریب سروکار دارد و تقریبها همه گویا هستند.

* * *

تقابل ریاضیات محض و ریاضیات کاربردی شاید در هندسه به روشترین شکل نمایان باشد. ما علم هندسه محض را داریم که شامل انواع متعددی از هندسه، از قبیل هندسه تصویری، هندسه اقلیدسی، هندسه نااقلیدسی، و غیره است. هر یک از این هندسهها یک الگوست، طرحی از ایدههاست که باید بر مبنای جالب بودن و زیباییاش درباره آن قضاوت کرد. چنین طرحی یک نقشه یا تصویر است که دستهای بسیاری آن را پرداخته اند و یک رونوشت جزئی و ناقص (و یا این حال، دقیق در قلمرو خود) از بخشی از واقعیت ریاضی است. ولی نکته ای که در اینجا برای ما مهم است، این است که به هر حال چیزی وجود دارد که این هندسهها تصاویر آن نیستند و آن، واقعیت فضازمانی جهان فیزیکی است. کاملاً واضح است که این هندسهها نمی توانند چنین تصاویری باشند زیرا زلزله و خسوف و کسوف مفاهیم ریاضی نیستند.

این گفته ممکن است برای کسی که خارج از گود ایستاده، اندکی غریب بنماید، ولی برای هندسه دان کاملاً بدیهی است؛ و من شاید بتوانم با ارائه مثالی آن را روشنتر بیان کنم. فرض کنید که من درسی درباره یک سیستم هندسی، مثلاً هندسه اقلیدسی، می دهم و شکلهایی تقریبی از خطوط راست، دایره ها، یا بیضیها روی تخته سیاه می کشم تا تخیل شاگردان را برانگیزانم. در وهله اول، واضح است که درستی قضیههایی که ثابت می کنم، به هیچ وجه ارتباطی با کیفیت ترسیمات من ندارد. تنها نقش این ترسیمات، این است که منظور مرا به شنوندگانم برسانند، و اگر از عهده این کار بر آیم، هیچ لزومی ندارد که ماهرترین نقشه کشها، آن شکلها را مجدداً رسم کنند. شکلها جنبه آموزشی دارند و جزئی از موضوع واقعی درس نیستند.

حال یک قدم به جلو برویم. اتفاقی که در آن درس می دهم، جزئی از جهان فیزیکی است و خودش طرح معینی دارد. مطالعه این طرح، و طرح کلی واقعیت فیزیکی، به نوبه خود علمی است که می توانیم آن را "هندسه فیزیکی" بنامیم. حال، تصور کنید که یک دینام بسیار قوی یا جسمی بسیار سنگین را وارد اتاق کنند. در این صورت، فیزیکدانها به ما می گویند که هندسه اتاق تغییر کرده است، طرح فیزیکی کلی آن مختصراً ولی قطعاً دگرگون شده است، [ولی] آیا قضایایی هم که من ثابت کرده ام غلط می شوند؟ مسلماً بی معنی است که تصور شود اثباتهای من تحت تأثیر این تغییر واقع می شوند. مثل این است که فکر کنیم اگر خواننده یک نمایشنامه شکسپیر چایی اش را روی صفحات آن بریزد، نمایشنامه تغییر می کند. نمایشنامه مستقل از صفحاتی است که روی آنها چاپ شده، و "هندسه های محض" مستقل از اتاقهای درس یا هر جزء دیگری از جهان فیزیکی هستند.

این، نظرگاه ریاضیدان محض است. اهل ریاضیات کاربردی، کسی که در فیزیک ریاضی کار می کند، طبعاً دیدگاه دیگری دارد زیرا او مجذوب خود جهان فیزیکی است که آن نیز برای خودش ساخت یا طرحی دارد. ما نمی توانیم این طرح را به دقت توصیف کنیم، چنانکه در مورد هندسه محض می کنیم، ولی می توانیم درباره آن حکم معنی داری بدهیم. ما می توانیم، گاهی به طور نسبتاً دقیق

زیادی دارد و با مختصری تغییر در صورت قضیه، می توان این استدلال را برای رده های بسیار گسترده ای از اعداد "گنگ" به کار برد. می توان به روشی بسیار مشابه ثابت کرد (همچنانکه گویا تئوتوس ثابت کرده است) که

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{17}$$

گنگ هستند، یا (فرا تر از کار تئوتوس) اینکه $\sqrt{2}$ و $\sqrt{17}$ گنگ هستند.

قضیه اقلیدس به ما می گوید که ذخیره سرشاری از مواد لازم برای ساختن حساب اعداد صحیح داریم، آن چنان حسابی که اجزای آن ارتباط منطقی داشته باشند. قضیه فیثاغورس و تعمیمهای آن به ما می گویند که هرگاه چنین حسابی را بسازیم، برای نیازهای ما کفایت نخواهد کرد، زیرا بسیاری مقادیر وجود دارند که نمی توانیم آنها را اندازه گیری کنیم. واضحترین مثال از این گونه مقادیر، قطر مربع است. ریاضیدانان یونانی بلافاصله به اهمیت عظیم این کشف پی بردند. آنها [قبل از این کشف] فرض می کردند (گمان می کنم بر اثر القاعات "طبیعی" عقل سلیم) که همه مقادیر همون، متوافق اند؛ یعنی مثلاً، هر دو طول مضارب از یک واحد مشترک اند، و بر مبنای این فرض، نظریه ای درباره تناسب پرداخته بودند. اکتشاف فیثاغورس نادرستی این مبنا را آشکار ساخت و به ایجاد نظریه بسیار عمیقتر اودوکسوس انجامید که در مقاله پنجم از کتاب اصول آمده است و در نظر بسیاری از ریاضیدانان جدید، بهترین دستاورد ریاضیات یونانی است. روح این نظریه به طرز شگفت آوری امروزی است و می توان آن را مبتدای نظریه جدید اعداد گنگ دانست که آنالیز ریاضی را دگرگون ساخته است و تأثیر زیادی بر فلسفه جدید داشته است.

با این اوصاف، هیچ شکی درباره "جدی بودن" این دو قضیه وجود ندارد و نکته ای که شایان ذکر است، این است که هیچیک از این دو قضیه کمترین اهمیت "عملی" ندارد. در کاربردهای عملی، فقط با اعداد نسبتاً کوچک سروکار داریم؛ تنها در اخترشناسی و فیزیک اتمی از اعداد "بزرگ" استفاده می شود که اهمیت عملی این دو رشته هم چندان بیشتر از اهمیت عملی مجردترین قسمتهای ریاضیات محض نیست. نمی دانم بالاترین درجه دقتی که تاکنون برای یک مهندس لازم بوده چقدر است. اگر خیلی دست بالا را بگیریم، می توانیم بگوییم ده رقم معنی دار. عدد

$$3141592654$$

(مقدار π تا ۹ رقم اعشار) برابر است با نسبت زیر

$$3141592654$$

$$1,000,000,000$$

تعداد اعداد اول کوچکتر از ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ برابر است با ۵۵۸۷۷۴۷۸. این برای مهندس کافی است و بدون بقیه این اعداد، می تواند کارهایش را راه بیندازد. در مورد [استفاده از] قضیه اقلیدس، همین قدر [برای مهندس] کفایت می کند، و در مورد قضیه فیثاغورس، واضح است که اعداد گنگ، برای مهندس جالب نیستند

و برای اولین بار با مطالعه آن آموختم که ریاضیات واقعاً چیست. از آن زمان به بعد، به نظر خودم يك رياضيدان واقعی بوده‌ام، با بلندپروازی در ریاضی و اشتیاق واقعی به ریاضیات.

در طول ده سال بعد مقالات زیادی نوشتم که از اهمیت بسیار کمی برخوردارند؛ فقط چهار یا پنج تا از آنها را می‌توانم هنوز با رضایت خاطر به یاد آورم. مراحل اوج کار من ده دوازده سال بعد فرا رسید، در سال ۱۹۱۱ که همکاری درازمدت خود را با لیتل وود شروع کردم و در سال ۱۹۱۳ که رامانوجان را کشف کردم. تمام بهترین کارهای من از آن زمان به بعد با آنها در ارتباط بوده است و واضح است که همکاری با آنها حادثه مهم زندگی من است. هنوز هم وقتی که احساس افسردگی می‌کنم و خودم را مجبور می‌بینم که به حرفهای افراد از خود راضی و کسل‌کننده گوش دهم، به خودم می‌گویم "من کاری کرده‌ام که دیگران هیچوقت نکرده‌اند، و آن همکاری پایایی با هر دو نفر لیتل وود و رامانوجان است." من بلوغ دیررس خود را به آنها مدیونم: اوج کار من اندکی پس از چهل سالگی و زمانی بود که استاد آکسفورد بودم. از آن پس، ضعف و افول تدریجی که سر نوشت همه افراد من و به ویژه ریاضیدانان من است، به سراغ من آمده است. يك رياضيدان ممکن است در شصت سالگی هنوز هم به اندازه کافی اهلیت و صلاحیت داشته باشد، اما بی‌فایده است که از او انتظار داشته باشیم ایده‌های اصیلی داشته باشد.

اکنون واضح است که بخش ارزشمند زندگی من پایان یافته است و من دیگر نمی‌توانم کاری بکنم که ارزش زندگی را به طرز محسوسی کاهش یا افزایش دهد. قضاوت عاری از تعصب در این مورد مشکل است ولی من زندگی خود را "موفقیت آمیز" به حساب می‌آورم؛ پاداشی که در طول زندگی دریافت کرده‌ام کمتر از استحقاق آدمی که در حد من قابلیت دارد، نبوده است. موقعیتهای آسوده و "محترمانه" ای داشته‌ام و چندان گرفتار جریان عادی و یکنواخت کار دانشگاهی نبوده‌ام. من از "درس دادن" خوشم نمی‌آید و بسیار کم به این کار پرداخته‌ام؛ تدریسی که می‌کرده‌ام تقریباً به طور کامل ناظر به کار تحقیق بوده است. من سخنرانی را دوست دارم و سخنرانیهای زیادی در جمع افراد بسیار با صلاحیت انجام داده‌ام. همیشه فرصت فراوانی برای تحقیق داشته‌ام که منشأ شادمانی بزرگ و دائمی در زندگی من بوده است. کار کردن با دیگران برایم آسان بوده و در مقیاس وسیعی با دو ریاضیدان استثنایی همکاری کرده‌ام و این همکاری به من امکان داده است که بسیار بیش از آنچه منطقاً انتظار داشته‌ام، مطالبی به ریاضیات بیفزایم. در عین حال، مثل هر ریاضیدان دیگری ناکامیهایی هم داشته‌ام ولی هیچیک از آنها چندان جدی نبوده و مرا عمیقاً غمگین نساخته است. اگر قرار بود زندگی دوباره‌ای را آغاز کنم، بی‌تردید باز هم همین مسیر را در پیش می‌گرفتم.

تصور این امر مهم به نظر می‌آید که می‌توانستم [در زمینه‌ای دیگر] عملکرد بهتری داشته باشم. من هیچ استعدادی در زبان‌شناسی یا زیبابی‌شناسی ندارم و علاقه بسیار کمی به علوم تجربی دارم. ممکن بود فیلسوف متوسطی بشوم، ولی قطعاً فیلسوف بسیار اصیلی از آب در نمی‌آمدم. ضمناً بعید نبود حقوقدان خوبی بشوم، ولی صرف نظر از حرفه دانشگاهی، روزنامه‌نگاری تنها حرفه‌ای است که

و گاهی به صورت بسیار تقریبی، روابطی را که بین پاره‌ای از اجزاء آن برقرارند مشخص کنیم و آنها را با روابط دقیقی که بین اجزاء يك سیستم هندسی محض وجود دارند مقایسه نماییم. ممکن است بتوانیم تشابهی بین این دو مجموعه از روابط پیدا کنیم و در این صورت، هندسه محض برای فیزیکدان جذاب می‌شود. چنین هندسه‌ای، نقشه‌ای به دست ما می‌دهد که تا حدی به واقعیات جهان فیزیکی "می‌برازد". هندسه‌دان مجموعه‌ای از نقشه‌ها را به فیزیکدان عرضه می‌کند که از میان آنها انتخاب کند. ممکن است يك نقشه بیشتر از نقشه‌های دیگر برازنده واقعیات باشد و در این صورت، هندسه‌ای که آن نقشه خاص را به دست می‌دهد مهمترین هندسه از نظر ریاضیدان کاربردی است. اضافه می‌کنم که حتی يك رياضيدان محض ممکن است احساس کند این هندسه را سریعتر درک می‌کند، زیرا هیچ ریاضیدان محضی تفکرش آن قدر محض نیست که هیچ علاقه‌ای به جهان فیزیکی احساس نکند. معذرتاً، تا حدی که تسلیم این وسوسه می‌شود، از تفکر ریاضی محض خود دست کشیده است.

* * *

در خاتمه، خلاصه استنتاجهای خود را در قالب شخصی تری مطرح می‌کنم. در آغاز گفتم که هر کسی که از رشته‌اش دفاع می‌کند، در واقع از خودش دفاع می‌کند؛ و توجیه من از زندگی يك رياضيدان حرفه‌ای، در نهایت، توجیهی از زندگی خودم است. بنابراین، این بخش پایانی در اساس قطعه‌ای از زندگی‌نامه من است. به یاد ندارم که هیچوقت خواسته باشم کار دیگری بجز ریاضیات در پیش بگیرم. فکر می‌کنم این موضوع همیشه برایم واضح بوده که استعدادهای خاص من در این مسیر قرار دارد و در این مورد، هیچوقت نظر افراد مستر برایم مطرح نبوده است. [البته] به یاد نمی‌آورم که در دوران کودکی شود و اشتیاق خاصی به ریاضیات داشته باشم و حرفه‌ای از این قبیل که از همان زمان برنامه و شیوه زندگی يك رياضيدان را داشته‌ام، دور از صداقت است. برای من ریاضیات در امتحان و دریافت بورس تحصیلی متجلی می‌شد؛ می‌خواستم از بچه‌های دیگر جلو بزنم و به نظر می‌رسید که از راه ریاضیات در این کار بیشتر موفق می‌شوم.

.

به محض اینکه وارد کیمبرج شدم، دریافتم که عضویت در هیأت علمی مترادف است با انجام دادن "کار اصیل" ولی مدت‌ها طول کشید تا تصور دقیقی از کار تحقیق به دست آوردم. البته در مدرسه دیده بودم که غالباً می‌توانم بهتر از معلم‌انم از پس کارها برآیم و حتی در کیمبرج، طبعاً به دفعات بسیار کمتر، می‌توانستم بهتر از مدرسان با مسائل دست و پنجه نرم کنم. با این حال، حتی وقتی که امتحان نودیوس را گذراندم، از موضوعاتی که بقیه عمرم صرف آنها شد بی‌اطلاع بودم و هنوز هم ریاضیات را موضوعی برای "رقابت" می‌دانستم. چشمانم را اول بار پروفیسور لاو باز کرد که چند ترم استاد من بود و اولین دریافت جدی خود از آنالیز را مدیون او هستم ولی بزرگترین دینی که به او دارم - از هر چه بگذریم او در درجه اول يك رياضيدان کاربردی بود - توصیه‌ای است که برای خواندن کتاب معروف ژوردان، درس آنالیز، به من کرد. هیچگاه حیرتی را که از مطالعه این اثر برجسته به من دست داد فراموش نمی‌کنم، اثری که اولین الهامبخش بسیاری از ریاضیدانان هم‌نسل من بود

فقط يك شانس دارم و آن این است كه مرا آفریننده چیزهایی بدانند كه ارزش آفریده شدن داشته اند. در اینکه چیزهایی آفریده‌ام: تردیدی نیست؛ مسأله، ارزش آن است.

واقعیت زندگی من و زندگی هرکسی كه ریاضیدانی از سنخ من بوده، این است: من چیزی بدانم افزوده‌ام و به دیگران هم کمک کرده‌ام كه چیزی به آن بیفزایند و این چیزها ارزشی دارند كه با ارزش ابداعات ریاضیدانان بزرگ و هنرمندان كوچك و بزرگ دیگری كه یادگاری از خود به جا گذاشته‌اند، فقط از لحاظ درجه تفاوت دارد و نه از لحاظ نوع.

می‌توانسته‌ام واقعاً از شانس موفقیت خود در آن مطمئن باشم. اگر محك ما آن چیزی باشد كه معمولاً موفقیت نامیده می‌شود، شكی نیست كه ریاضیدان شدن من كار درستی بوده است.

پس اگر خواست من این بوده باشد كه در حد معقولی زندگی شاد و آسوده‌ای داشته باشم، انتخاب من درست بوده است. اما مشاوران حقوقی و دلالان سهام و افرادی كه در سابقه اسبدوانی شرط‌بندی می‌کنند نیز غالباً زندگی آسوده و شادی دارند، [ولی] مشکل بتوان گفت كه وجود آنها به غنای جهان می‌افزاید. آیا من می‌توانم ادعا كنم كه زندگی‌ام از جهتی كمتر از زندگی آنها پوچ و عبث است؟ باز به نظر من آید كه این سؤال فقط يك پاسخ دارد: شاید بله، ولی فقط به يك دلیل.

من هیچ كار "مفیدی" نكرده‌ام. هیچ يك از اكتشافات من مستقیماً یا به طور غیر مستقیم، در جهت مثبت یا در جهت منفی، كوچكترین تغییری در آسایش جهانیان ایجاد نكرده است. من به تعلیم و تربیت ریاضیدانان كمك کرده‌ام، ولی ریاضیدانانی از نوع خودم، و كار آنها نیز، تا جایی كه به كمك من مربوط می‌شود، همان قدر بی‌فایده است كه كار من. اگر طبق معیارهای عملی قضاوت كنیم، ارزش زندگی ریاضی من هیچ است، و به هر حال در خارج از حیطه ریاضیات، ناچیز است. برای اینکه كاملاً بی‌اهمیت به حساب نیایم

● ترجمه گزیده‌ای از

G.H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, with a foreward by C.P. Snow, Cambridge University Press (1976).

این كتاب اولین بار در سال ۱۹۴۰ چاپ شده و از چاپ چهارم (سال ۱۹۶۷) به بعد با مقدمه‌ای از چارلز پرسی اسنو همراه بوده است.